Beiträge zur Netzwerksynthese mit Hilfe von Cauerschen und verallgemeinerten q-Funktionen

von

Erich Christian

Beiträge zur Netzwerksynthese mit Hilfe von Cauerschen und verallgemeinerten q-Funktionen

Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik an

der Ruhr-Universität Bochum

von

Erich Christian

geb. zu Wien

Bochum 1973

Dissertation eingereicht am : 13. Juni 1973

Tag der mündlichen Prüfung : 2. Juli 1973

Referent : Professor Dr. A. Fettweis

Korreferent : Professor Dr.-ing. Georg Bosse.

Inhalt.

A. Einleitung und Ziel der Arbeit.

Um das Approximationsproblem beim Entwurf von Filtern mit der Wellenparametermethode zu lösen, hat Cauer vor etwa 40 Jahren die q-Funktionen eingeführt. Im Zusammenhang damit wurde zum ersten Mal eine Approximation im Tschebyscheffschen Sinne auf dem Filtergebiet gelöst.

Obwohl die Wellenparametermethode heute kaum noch für den Entwurf von Übertragungsnetzwerken herangezogen wird, hat sich dieser Teil der Netzwerktheorie doch als sehr nützlich für die moderne Netzwerksynthese erwiesen. Man kann die q-Funktionen als Bindeglied zwischen der Wellenparametertheorie und der modernen Netzwerksynthese betrachten.

Die Grundzüge der q-Funktionen und deren Anwendungen sind in Cauer's Buch beschrieben ([Ca-1]), allerdings weit verstreut an verschiedenen Stellen. Der grösste Teil bezieht sich auf Anwendungen im Zusammenhang mit Wellenparameterfiltern. Mit Hilfe der Bezugsfiltermethode von Darlington kann ein Teil der Cauerschen Formeln direkt auf den Entwurf von Synthesefiltern angewendet werden ([Da-1]). Nach einer Fussnote in Cauer's Buch zu schliessen ([Ca-1], loc. cit., Seite 663), war dies bereits Cauer bekannt. Spätere Beiträge für diese Anwendung der Cauerschen q-Funktionen stammen von Fetzer ([Fe-1],Fe-2]), Eisenmann ([Ei-1]) und Fettweis ([Fe-3],[Fe-4],[Fe-5]). Auf diese Arbeiten wird später noch Bezug genommen werden.

In der folgenden Arbeit wird der Versuch gemacht, die bekannten Methoden zu erweitern und ergänzen. Als Erweiterungen können gelten : Das Aufstellen der charakteristischen Funktion aus gegebenen Nullstellen oder aus einer beliebigen Kombination von Nullstellen und Dämpfungspolen; eine verbesserte Rekursionsformel für die Berechnung der charakteristischen Funktion unabhängig vom Grad und Typ, die sich besonders für programmgesteuerte Rechenmaschinen eignet; schliesslich die Berücksichtigung von Phase und Laufzeit bei der Wahl der Pole und Nullstellen.

Alle bekannten Veröffentlichungen über q-Funktionen beziehen sich auf solche Typen, wie sie bereits Cauer bekannt waren. Das sind im wesentlichen solche, die der Wurzel eines Pondukts oder eines Qotienten zweier Reaktanzen gleich sind. Diese bekannten Typen lassen sich durch andere ergänzen, denen man keine realisierbaren Reaktanzen mehr zuschreiben kann. Ähnliche Ergänzungen sind auch bei q'-Funktionen möglich.
Diese Ergänzungen gelten nicht für den Tiefpass und in nur geringem Masse für den Bandpass : Durch die Wahl einer neuartigen q'-Funktion lassen sich parametrische Bandpässe entwerfen. Von Bedeutung sind diese Ergänzungen für Bandsperren und Filter mit mehr als einem Durchlassbereich. In diesen letztgenannten Filtertyp sind allerdings nur Filter mit zwei Durchlassbereichen von einiger praktischer Bedeutung, da sie sich vorteilhaft als Bandsperren verwenden lassen. Der Diskussion solcher Filter ist ein eigener Abschnitt eingeräumt. Hauptsächlich wird darin die Approximation behandelt. Auf das Realisierungsproblem wird nur kurz am Ende dieses Abschnitts eingegangen.
Vor einiger Zeit wurde von Watanabe eine alternative Methode veröffentlicht, mit der gleichmässige Welligkeit im Durchlassbereich mittels Abelscher Integrale erzielt werden kann ([Wa-1]). Diese Veröffentlichung ist sehr kurz gehalten und es bedarf erheblicher Arbeit , wenn man sie praktisch verwerten will. Der Vergleich beider Methoden, den Eisenmann vor etlichen Jahren für Tiefpässe angestellt hat, zeigt, dass beide Methoden völlig gleiche Resultate liefern.*)
Es kann angenommen werden, dass die bekannten und im folgenden erweiterten q-Funktionen beide Methoden für alle Filtertypen gleichwertig machen. Es ist aussenden sehr fraglich, ob man mit den Abelschen Integralen einen geringeren Rechenaufwand erzielen kann als mit den bekannten oder den im Abschnitt C.1 dargestellten Rekursionsformeln.

---

*) ([Ei-1])

Für manche Anregung und die Förderung der Arbeit möchte der Verfasser besonders Herrn Professor Dr.A.Fettweis danken. Dank gebührt auch Herrn Professor Dr.Härtl für seine Unterstützung und Herrn Professor Dr. Nai Ta Ming für das eingehende Studium des ersten Entwurfes und die konstruktive Kritik. Besonders zu Dank verpflichtet ist der Verfasser auch Herrn Dipl. Math. E.Eisenmann für die sich über viele Jahre erstreckenden Diskussionen und die Durchsicht der Arbeit.

B. Grundlegende Formeln der Betriebsparametertheorie.

Für lange Zeit wurde der Entwurf von Filtern ausschliesslich mit Hilfe der Wellenparametertheorie durchgeführt, deren wesentliche Begriffe der nicht exakt relisierbare Wellenwiderstand und das Wellenübertragungsmass sind. Demgegenüber geht man beim Entwurf von Filtern nach modernen Methoden immer von geeigneten Funktionen aus. Im ersten, rein mathematischen Schritt wird versucht, durch günstige Verteilung der Pole und Nullstellen dieser Funktionen gegebene Forderungen zu approximieren. Im zweiten Schritt wird dann ein geeignetes Übertragungsnetzwerk realisiert. Im allgemeinen ist eine ganze Anzahl theoretisch gleichwertiger Netzwerke möglich.
Durch Einführung der q-Funktionen hat Cauer ein Bindeglied zwischen der Wellenparameter- und der Betriebsparametermethode geschaffen. Ursprünglich waren sie für die Wellenparametermethode entworfen. Darlington's Bezugsfiltermethode ([Da - 1]) gestattet es aber, sie auch direkt für den Approximationsschritt der Betriebsparametertheorie zu benützen. Zur späteren Bezugnahme seien die wesentlichen Gleichungen und Beziehungen kurz zusammengefasst.

B.1. Die Leistungsübertragung durch einen verlustlosen Vierpol.

Man betrachte die Leistungsübertragung von einer Quelle mit dem Innenwiderstand R durch ein verlustloses Übertragungsnetzwerk in einen Lastwiderstand R. Die Gleichheit der beiden Abschlüsse ist keine Einschränkung. Durch Zusatz eines idealen Transformators lässt sich dieser Betriebsfall auch dann herstellen, wenn die Abschlüsse verschieden sind. Normiert man alle Impedanzen mit dem Bezugswiderstand $R_{ref} = R$, so ergibt sich der normierte Betriebsfall, wie er in Abb.B.1 dargestellt ist.
Wenn das Übertragungsnetzwerk nur aus konzentrierten Reaktanzen besteht, lässt sich das Betriebsverhalten der Anordnung in Abb.B.1. durch die folgen-

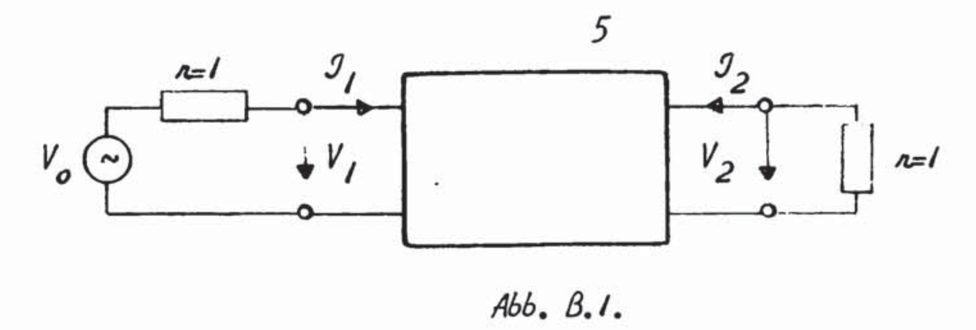


Abb. B.1.

den Übertragungspolynome ausdrücken :

$\mathcal{E}(s)$, ein Hurwitzpolynom dessen Nullstellen die Eigenfrequenzen des Netzwerkes sind;

$F(s)$, ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dessen Nullstellen die des Reflexionskoeffizienten sind.

$P(s)$, ein gerades oder ungerades Polynom, dessen Nullstellen die im Endlichen gelegenen Dämpfungspole sind.

Diese Polynome sind durch die Feldkellersche Gleichung verknüpft :

$$\mathcal{E}(s)\,\mathcal{E}(-s) = F(s)\,F(-s) + P(s)\,P(-s) \qquad (B-1)$$

Durch paarweise Zusammenfassung dieser Polynome ergeben sich die folgenden rationalen Funktionen :

$$H(s) = \frac{\mathcal{E}(s)}{P(s)} \qquad \text{die Übertragungsfunktion } ^{*)}$$

$$K(s) = \frac{F(s)}{P(s)} \qquad \text{die charakteristische Funktion} \qquad (B-2)$$

$$\rho(s) = \frac{F(s)}{\mathcal{E}(s)} \qquad \text{der Reflexionsfaktor}$$

Es gilt immer $\left. H(s)\,H(-s)\right|_{s=j\omega} \geq 1$. Unter diesen Umständen lässt sich die folgende Gleichung anschreiben :

$$H(s)\,H(-s) = 1 + K(s)\,K(-s) \qquad (B-3)$$

---

*) Viele Autoren bezeichnen den reziproken Ausdruck als " Übertragung - funktion ".

Mit diesen Polynomen und rationalen Funktionen lassen sich die Betriebsgrössen der Abb.B.1 in folgender Weise ausdrücken :

(a) Die Betriebsübertragung der Spannung :

$$H(s) = \frac{\not{j}\, V_o}{V_2} \qquad (B-4)$$

(b) Die Betriebsdämpfung der Leistung :

$$A[dB] = 10 \log\, H(s)\, H(-s)\Big|_{s=j\omega} = 10 \log\, [1 + K(s)K(-s)]_{s=j\omega} \qquad (B-5)$$

(c) Die Betriebsphase :

$$\Delta\varphi = \begin{cases} = \operatorname{atan} \dfrac{1}{j}\, \dfrac{\mathcal{E}_u(j\omega)}{\mathcal{E}_g(j\omega)} & \text{wenn } P(s) = \text{gerade} \\ = \operatorname{atan} \dfrac{1}{j}\, \dfrac{\mathcal{E}_g(j\omega)}{\mathcal{E}_u(j\omega)} & \text{wenn } P(s) = \text{ungerade} \end{cases} \qquad (B-6)$$

(d) Die Gruppenlaufzeit, definiert als der Differentialquotient der Phase bezüglich ω :

$$\tau(\omega) = \frac{\mathcal{E}_g(j\omega)\, \mathcal{E}_u'(j\omega) - \mathcal{E}_u(j\omega)\, \mathcal{E}_g(j\omega)}{\mathcal{E}_g^2(j\omega) - \mathcal{E}_u^2(j\omega)} \qquad (B-7)$$

(e) Die Kettenmatrix :

$$(A) = \begin{pmatrix} H_g - K_g & H_u - K_u \\ H_u + K_u & H_g + K_g \end{pmatrix} \qquad (B-8)$$

In den Formeln (B-6) bis (B-8) sollen die indices " g " und " u " immer den geraden, bzw. den ungeraden Teil der entsprechenden Funktionen andeuten.

B.2. Gleichmässige Welligkeit im Durchlassbereich.

Die folgenden Abschnitte sollen sich vornehmlich mit dem Approximationsproblem beschäftigen, dessen Zweck darin besteht, einen Satz von Übertragungspolynomen zu finden, die

(a) miteinander verträglich sind, d.h. die die Gleichung (B-1) erfüllen, und die
(b) theoretisch gewährleisten, dass gegebene Anforderungen vom Übertragungsnetzwerk erfüllt werden.

Für Anforderungen, die Phase und Laufzeit beinhalten, ist der Ausgangspunkt der Berechnungen normalerweise die Übertragungsfunktion. Sind die Anforderungen aber nur auf die Betriebsdämpfung beschränkt, dann ist es wesentlich einfacher, $K(s)$ als Ausgangspunkt zu wählen, da die Enschränkungen für die charakteristische Funktion wesentlich geringer sind als die für $H(s)$.

Für die Approximation der Betriebsdämpfung spielen Toleranzschemata nach Abb. B.2 eine besondere Rolle. Sie sind durch eine feste obere Schranke im Durchlassbereich ausgezeichnet. Ohne Einbusse an Allgemeinheit kann man die untere Schranke als " 0 " ansetzen, da sich alle anderen Fälle leicht aus diesem Sonderfall ableiten lassen ([Ca-1], Seite 17 und 29). Für diesen Sonderfall sind Cauers φ-Funktionen in Verbindung mit Darlington's Bezugsfiltermethode von besonderen Bedeutung. Sie gestattet bei beliebigen Wahl der Dämpfungspole im Durchlassbereich eine gleichmässige Welligkeit zu erzielen und damit eine gegebene feste Schranke voll auszunützen.

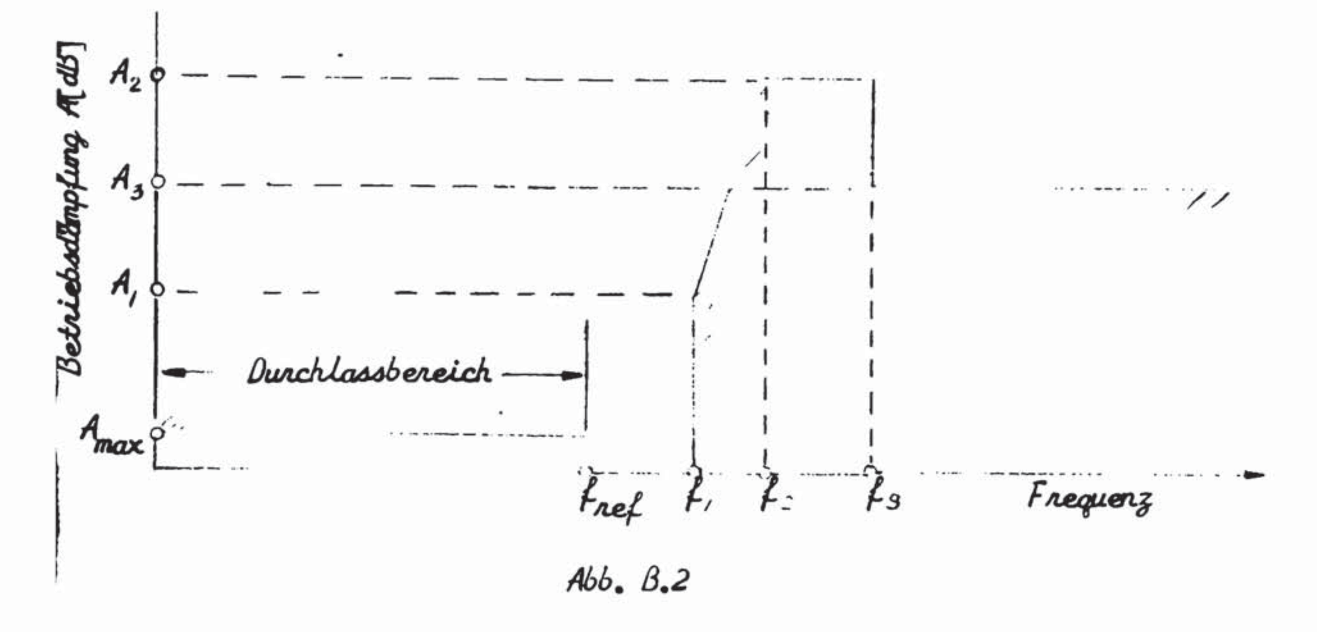


Abb. B.2

Ursprünglich dienten die q-Funktionen in der Wellenparametertheorie der Berechnung des Übertragungsfaktors angepasster Glieder. Für ein Vollglied dargestellt durch seine Brückenreaktanzen Z_{ai} und Z_{bi}, gilt :

$$e^{g_i} = \frac{\sqrt{Z_{bi}/Z_{ai}} + 1}{\sqrt{Z_{bi}/Z_{ai}} - 1} = \frac{q_i + 1}{q_i - 1} = Q_i \qquad (B-9)$$

mit

$$q_i = \sqrt{Z_{bi}/Z_{ai}} \qquad (B-10)$$

Daraus folgt :

$$\cosh g_i = \tfrac{1}{2} [e^{g_i} + e^{-g_i}] = \frac{q_i^2 + 1}{q_i^2 - 1} \qquad (B-11)$$

Für eine Kette angepassten Glieder gilt dann :

$$e^{g} = e^{\sum g_i} = \prod_i \frac{q_i + 1}{q_i - 1} = \frac{q + 1}{q - 1} = Q \qquad (B-12)$$

$$\cosh g = \cosh (\sum g_i) = \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \qquad (B-13)$$

Bestehen diese Teilglieder nur aus konzentrierten Elementen, dann sind die Ausdrücke der Gleichungen (B-11) und (B-13) rational und nicht transzendente Funktionen. Zum Teil aus historischen und zum Teil aus praktischen Gründen wurde aber die Bezeichnung " cosh " beibehalten.

Für Funktionen, die durch die Gleichung (B-10) charakterisiert sind, hat Cauer die Bezeichnung " q-Funktionen " geprägt ([Ca - 1], Seite 217). Sie sind durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet :

(a) $q(s)$ ist eine irrationale, positive Funktion von s, deren Quadrat eine rationale Funktion ist.

(b) Entlang der imaginären Achse ist $q(s)$ entweder reell oder rein imaginär.

(c) Die Real- und Imaginärintervalle werden durch Verzweigungspunkte der Ordnung " $\frac{1}{2}$ " getrennt. An jedem dieser Punkte $s = s_1$ nimmt $q(s)$ eine der beiden folgenden Formen an :

$$q(s) = \begin{cases} = \sqrt{s - s_1}\; r(s) \\ = \dfrac{r(s)}{\sqrt{s - s_1}} \end{cases} \qquad \text{mit } r(s_1) \neq 0 \text{, regulär}$$

Die Verzweigungspunkte sind die einfachen Nullstellen der Funktion Z_{ai}/Z_{bi} .

(d) Alle Nullstellen und Pole einer q-Funktion müssen im Imaginärintervall liegen.

Elementare q-Funktionen bildet man aus Gliedern möglichst einfacher Struktur mittels der Gleichung (B-10). Es lässt sich dann leicht zeigen, dass die zusammengesetzte q-Funktion , die durch Gleichung (B-12) definiert ist, ebenfalls die obigen Bedingungen erfüllt. Die Zusammensetzung erfolgt entsprechend Gleichung (B-12) immer nach der Regel :

$$Q = \frac{q+1}{q-1} = \pm \frac{q_1 + 1}{q_1 - 1}\;\frac{q_2 + 1}{q_2 - 1}\;\frac{q_3 + 1}{q_3 - 1}\;\ldots. \qquad (B-14)$$

Zur Zusammensetzung ist notwendig, dass alle elementaren Funktionen $q_i(s)$ identische Real und Imaginärbereiche besitzen.

Aus Gleichung (B-13) und (B-14) ergibt sich dann :

$$\cosh g = \cosh(a + jb) \begin{cases} = \cos b & \text{wenn } q = \text{imaginär} \\ = \cosh a & \text{wenn } q = \text{reell} \end{cases} \qquad (B-15)$$

$\cosh g$ ist eine rationale Funktion, die in den Imaginärbereichen von $q(s)$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ schwankt und ausserdem auf Grund von Gleichung (B-14) dort Pole besitzt, wo die elementaren q-Funktionen den Wert 1 annehmen. Auf Grund dieser Eigenschaften ist die Funktion :

$$K(s) = C_k K_o(s) = C_k \cosh g = C_k \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \qquad (B-16)$$

eine geeignete charakteristische Funktion zum Erzielen gleichmässiger Welligkeit in den Frequenzbereichen, die den Imaginärbereichen der q-Funktionen entsprechen.

Charakteristische Funktionen nach Gleichung (B-16) sind immer gerade. Zur Bildung von ungeraden Funktionen gelangt man, wenn man vom Übertragungsfaktor des Halbgliedes ausgeht ([(a-1], Seite 131 und 267).

$$e^{g_{\frac{1}{2}}} = \pm j \frac{q_i' + 1}{q_i' - 1} \quad \text{oder} \quad e^{g_{\frac{1}{2}} \pm j \frac{1}{2}\pi} = \frac{q_i' + 1}{q_i' - 1} \qquad (B-17)$$

Formal ergibt sich q_i' auch durch Zerspaltung eines elementaren Vollgliedes, wobei nach Gleichung (B-14) gilt :

$$\frac{q_i + 1}{q_i - 1} = - \frac{q_i' + 1}{q_i' - 1} \; \frac{q_i' + 1}{q_i' - 1} \qquad (B-18)$$

Daraus folgt für das unbekannte q_i' :

$$q_i'(s) = q_i^{-1}(s) \pm \sqrt{q_i^{-2} - 1} \qquad (B-19)$$

Das Auftreten des Minuszeichens in Gleichung (B-18) ist dadurch begründet, dass man physikalisch in einem der beiden Halbglieder vor dem Zusammensetzen den Eingang umpolen muss.

Der durch Gleichung (B-19) definierte Ausdruck für $q_i'(s)$ wird praktisch nur dann sinnvoll, wenn das $q_i(s)$ zusammenfallenden Polpaaren bei 0 oder ∞ oder aber auch bei 0 und ∞ entspricht. Die dann entstehenden Funktionen werden als " elementare q'-Funktionen $q_0'(s)$ " bezeichnet. Die Hinzunahme einer elementaren q'-Funktion bei der Zusammensetzung nach Gleichung (B-14) erzeugt eine zusammengesetzte q'-Funktion :

$$e^{g' \mp j\frac{1}{2}\pi} = \frac{q'+1}{q'-1} = \frac{q_0'+1}{q_0'-1}\;\frac{q_1+1}{q_1-1}\;\frac{q_2+1}{q_2-1}\;\cdots \qquad (B-22)$$

mit

$$g' = g_{\frac{1}{2}} \pm j\tfrac{1}{2}\pi + g_1 + g_2 + \;.....$$

q'-Funktionen haben die gleichen Eigenschaften wie q-Funktionen mit einer Ausnahme : Für reelle Werte des Frequenzparameters sind sie nicht reell sondern haben den Betrag 1 . Sie besitzen die selben Real- und Imaginärbereiche wie die q-Funktionen. Bildet man analog zu Gleichung (B-15) die Funktion $\cosh(g' \mp j\frac{1}{2}\pi)$, so erhält man :

$$\cosh(g' \mp j\tfrac{1}{2}\pi)\begin{cases} = \cosh g' \cos\tfrac{1}{2}\pi \mp j \sinh g' \sin\tfrac{1}{2}\pi = \mp j \sinh g' \\ = \tfrac{1}{2}\left[\dfrac{q'+1}{q'-1} + \dfrac{q'-1}{q'+1}\right] = \dfrac{q'^2+1}{q'^2-1} \end{cases} \qquad (B-23)$$

Auf Grund ähnlicher Überlegungen wie in Gleichung (B-15) ist ersichtlich, dass die Funktion :

$$K(s) = C\; K_o(s) = \pm\; C\; \sinh g' = \pm j C \;\frac{q'^2+1}{q'^2-1} \qquad (B-24)$$

eine rationale Funktion mit vorschreibbaren Polstellen ist, die in den Imaginärintervallen von $q'(s)$ zwischen den Grenzen $-jC$ und $+jC$ schwankt. Sie ist deshalb ebenfalls eine geeignete charakteristische Funktion zum Approximieren eines Toleranzschemas nach Abb.B.2.

In den Gleichungen (B-16),(B-24) und im folgenden soll $K_o(s)$ immer diejenige rationale Funktion bedeuten, die in den Durchlassbereichen zwischen den Grenzen -1 und $+1$ bzw. $-j$ und $+j$ schwankt. Der Zusatz einer geeigneten Konstanten C erzeugt dann die gewünschte charakteristische Funktion.

B.3. Erweiterung der Typen.

Die Eigenschaften der herkömmlichen q-Funktionen sind dadurch bedingt, dass sie als Wurzel des Quotienten zweier realisierbarer Reaktanzen definiert sind. Für die Synthese ist ein Teil der früher erwähnten Definitionseigenschaften zu einschränkend. Dadurch, dass man einen Teil der obigen Forderungen fallen lässt oder abändert, kann man die bekannten q-Funktionen durch solche Typen erweitern, denen man keine realisierbaren Wellenparameterglieder zuordnen kann. Die Definitionseigenschaften dieser verallgemeinerten q-Funktionen seien im folgenden denen herkömmlicher q-Funktionen gegenübergestellt :

Herkömmliche q-Funktionen:	Verallgemeinerte q-Funktionen:
(1) $q(s)$ ist eine irrationale, positive Funktion, deren Quadrat eine reelle, rationale Funktion ist.	(1) $q(s)$ ist eine irrationale Funktion, deren Quadrat eine rationale Funktion ist
(2) Für reelle s ist $q(s)$ reell	(2) Für reelle s ist $q(s)$ entweder überall reell oder überall rein imaginär .

(3) Entlang der imaginäre Achse ist $q(s)$ entweder reell oder rein imaginär.

(4) Die Real- und Imaginärbereiche auf der imaginären Achse werden durch Verzweigungspunkte der Ordnung " $\frac{1}{2}$ " voneinander getrennt. In der Umgebung eines solchen Punktes $s = s_1$ nimmt $q(s)$ die Form

$$q(s) = (s - s_1)^{\pm \frac{1}{2}} r(s)$$

an, wobei $r(s_1) \neq 0$ und regulär ist . (Für die herkömmlichen q-Funktionen sind die Verzweigungspunkte die einfachen Nullstellen oder Pole des Quotienten zweier realisierbarer Reaktanzen.)

(5) Alle Nullstellen und Pole sind einfach und liegen im Imaginärbereich. Entlang der imaginären Achse	(5) Alle Pole und Nullstellen können auftreten : als symmetrisch gelegene Paare auf der reellen Achse, als

folgen Pole (oder polartige Verzweigungen) und Nullstellen (oder nullstellenartige Verzweigungen) abwechselnd aufeinander. In den Realbereichen ist $q(s) > 0$ und endlich.

konjugiert komplexe Paare im Innern der Real- als auch der Imaginärbereiche, als komplexe Quadrupel und bei $s = 0$. Diese Nullstellen und Pole können auch mehrfach sein.

Verallgemeinerte q-Funktionen sind von der Form :

$$m_i(s)\; q_i(s)$$

worin $m_i(s) = n_i(s) / d_i(s)$ eine gerade oder ungerade rationale Funktion ist, die für reelle s entweder reell oder rein imaginär ist. $q_i(s)$ enthalte den irrationalen Teil der Funktion. Funktionen dieser Art lassen sich formal nach Gleichung (B-14) zusammensetzen :

$$\frac{q+1}{q-1} = \prod_i \frac{m_i(s)\; q_i(s) + 1}{m_i(s)\; q_i(s) - 1} \qquad (B - 24.1)$$

Der Beweis dazu ist analog dem im Unterabschnitt D.2. Formt man formal wie früher die Funktion $K_o(s)$, so erhält man :

$$K_o(s) = \tfrac{1}{2} \left[\frac{q+1}{q-1} + \frac{q-1}{q+1} \right] = \tfrac{1}{2} \left[\prod_i \frac{m_i(s)\; q_i + 1}{m_i(s)\; q_i - 1} + \prod_i \frac{m_i(s)\; q_i - 1}{m_i(s)\; q_i + 1} \right]$$

$$K_o(s) = \tfrac{1}{2} \; \frac{\prod_i [\, m_i(s)\; q_i + 1 \,]^2 + \prod_i [\, m_i(s)\; q_i - 1 \,]^2}{\prod_i [\, m_i^2(s)\; q_i^2 - 1 \,]}$$

Der Ausdruck im Nenner ist eine rationale Funktion. Im Zähler treten zunächst irrationale Teile auf, die jedoch paarweise ungleiches Vorzeichen haben und sich daher gegenseitig aufheben. Der gesamte Ausdruck wird daher rational. Da die obigen Forderungen (3) und (4) weiterhin wie früher gelten, schwankt

$K_o(s)$ in den Imaginärbereichen zwischen den Grenzen -1 und $+1$. Es ist aber nicht mehr gewährleistet, dass die Maxima und Minima dieser Schwankungen wirklich die obere oder untere Schranke erreichen.

Ähnliche Erweiterungen gelten auch für die q'-Funktionen. Im folgenden seien die Defintionseigenschaften der herkömmlichen und der verallgemeinerten q'-Funktionen einander gegenübergestellt.

<u>Herkömmliche q'-Funktionen:</u>

(1) $q'(s)$ ist eine irrationale, positive Funktion, deren Quadrat eine rationale Funktion von s ist.

<u>Verallgemeinerte q'-Funktionen</u>

(1) $q'(s)$ ist eine irrationale Funktion deren Quadrat eine rationale von s ist

(2) Für reelle Argumente s hat $q'(s)$ den Betrag 1.

(3) Wie die Definitionseigenschaft (3) bei q-Funktionen.

(4) Wie die Definitionseigenschaft (4) bei q-Funktionen.

Herkömmliche q'-Funktionen:

(5) Alle Pole und Nullstellen sind einfach und liegen im Imaginärbereich (aber nicht bei $s = 0$, falls diesen Punkt in einem Imaginärbereich liegt). Entlang der imaginären Achse folgen Pole (oder polartige Verzweigungspunkte) und Nullstellen (oder nulstellenartige Verzweigungspunkte) abwechselnd aufeinander. Sie liegen konjugiert komplex zueinander.

Verallgemeinerte q'-Funktionen:

(5) Die Gesamtheit aller Pole, polartige Verzweigungspunkte, Nullstellen und nullstellenartige Verzweigungspunkte hat quadrantische Symmetrie. In dieser Anordnung sind konjugierte kompexe Paare im Innern sowohl der Real- als auch der Imaginärbereiche zugelassen, ausserdem auch komplexe Quadrupel, nicht aber reelle Pole oder Nullstellen. In jedem konjugiert komplexen Paar dieser Anrodnung ist der eine Punkt ein Pol (oder polartige Verzweigung), der andere eine Nullstelle (oder nullstellenart. Verzw.)

Die herkömmlichen elementaren q'-Funktionen sind in der Tabelle der Abb. B-4 des nächsten Unterabschnitts enthalten. Die in dieser Tabelle angeführten q'-Funktionen des Bandpasses erzeugt man üblicher Weise durch eine Bandpasstransformation aus dem q_0' - des Tiefpasses. Man erhält sie aber auch - und dazu noch eine zweite, erweiterte q'-Funktion - durch Zerspalten einer geeigneten q-Funktion mittels der Gleichung (B-19). Dazu bildet man zuerst durch Zusammensetzen von

$$q_1(s) = \sqrt{\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}} \qquad \text{und} \qquad q_2(s) = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}}$$

die zusammengesetzte q-Funktion

$$q(s) = \frac{s^2 + ab}{\sqrt{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}} \quad ,$$

die je einem Polpaar bei 0 und ∞ zugeordnet ist. Die Gleichung (B-19) ergibt dann die folgenden beiden Lösungen :

$$q'(s) = \begin{cases} = \sqrt{\dfrac{(s + ja)(s - jb)}{(s - ja)(s + jb)}} \\[2ex] = \sqrt{\dfrac{(s + ja)(s + jb)}{(s - ja)(s - jb)}} \end{cases}$$

Die erste ist die reziproke Form der herkömmlichen q'-Funktion. Die zweite entsteht formal dadurch, dass man die beiden konjugiert gelegenen Verzweigungspunkte bei $\pm jb$ in ihrer Art vertauscht : Aus polartiger Verzweigung wird nullstellenartige Verzweigung und umgekehrt. Sie erfüllt nicht mehr die Definitionseigenschaften (1) und (5) der herkömmlichen q'-Funktionen, wohl aber die der erweiterten q'-Funktionen. Durch analoges Vertauschen von pol- und nullstellenartigen Verzweigungen in Filtern mit mehr als einem Durchlassbereich ergeben

sich aus einer herkömmlichen, elementaren q'-Funktion eine ganze Reihe erweiterter, elementarer q'-Funktionen. Ihre Zahl steigt mit wachsender Zahl der Durchlassbereiche. Für Filter mit zwei Durchlassbereichen sind es bereits acht, wobei die reziproken Formen nicht mitgezählt sind (siehe Unterabschnitt D.3.1).

Die Zusammensetzung zweier beliebiger, elementarer q'-Funktionen mit gleichen Real und Imaginärbereichen ergibt eine q-Funktion. Weiters wird behauptet, dass beim Zusammensetzen einer verallgemeinerten q-Funktion mit irgendeiner dieser elementaren q'-Funktionen eine verallgemeinerte q'-Funktion entsteht. Bei den folgenden Beweisen wird stillschweigend vorausgesetzt, dass alle beim Zusammensetzen benützten q- und q'-Funktionen gleiche Real - und Imaginärbereiche besitzen.

<u>1.Beweis :</u>

Es seien $q'_{01}(s)$ und $q'_{02}(s)$ zwei beliebige, elementare q'-Funktionen. Durch Zusammensetzen erhält man :

$$\frac{q+1}{q-1} = \frac{q'_{01}+1}{q'_{01}-1}\,\frac{q'_{02}+1}{q'_{02}-1} \longrightarrow q = \frac{q'_{01}\,q'_{02}+1}{q'_{01}+q'_{02}}$$

Auf der imaginären Achse gilt :

$$q'_{01}, q'_{02} \begin{cases} = \text{beide reell} & \longrightarrow \quad q = \text{reell} \\ = \text{beide imaginär} & \longrightarrow \quad q = \text{imaginär} \end{cases}$$

Auf der reelle Achse gilt :

$$\left.\begin{array}{l} q'_{01} = e^{j\varphi_1} \\ q'_{02} = e^{j\varphi_2} \end{array}\right\} \quad q = \frac{e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}+1}{e^{j\varphi_1}+e^{j\varphi_2}} = \frac{e^{j\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}+e^{-j\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}}{e^{j\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}+e^{-j\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}} = \text{reell}$$

q erfüllt daher die Bedingung (1) für q-Funktionen, nämlich für reelle s reell zu sein.

2. Beweis :

Es sei $q_n(s)$ eine verallgemeinerte q-Funktion und $q_0'(s)$ eine beliebige, elementare q'-Funktion. Zusammengesetzt ergebe sich die Funktion

$$q'_{n+1}(s) = \frac{q_n(s)\, q_0'(s) + 1}{q_n(s) + q_0'(s)}$$

Offensichtlich hat $q'_{n+1}(s)$ entlang der imaginären Achse die gleichen Real- und Imaginärbereiche. Auf der reellen Achse gilt :

$$\left.\begin{array}{l} q_n(s) = \text{reell} \\ q_0'(s) = e^{j\varphi} \end{array}\right\} \quad q'_{n+1}(s) = \frac{q_n\, e^{j\varphi} + 1}{q_n + e^{j\varphi}} = \frac{q_n\, e^{j\frac{1}{2}\varphi} + e^{-j\frac{1}{2}\varphi}}{q_n\, e^{-j\frac{1}{2}\varphi} + e^{j\frac{1}{2}\varphi}}$$

Für reelle q_n sind Zähler und Nenner von q'_{n+1} konjugiert komplex zueinander. Daher ist $|q'_{n+1}| = 1$ entlang der reellen Achse entsprechend der Eigenschaft (2) von q'-Funktionen.

Beim Zusammensetzten einer beliebigen Anzahl elementarer q- und q'-Funktionen kann man so vorgehen, dass man zunächst aus den gegebenen q-Funktionen und denen, die man aus paarweiser Zusammenfassung von den elementaren q'-Funktionen gewinnt, eine verallgemeinerte q-Funktion bildet. Werden in diesem Progess alle elementaren q'-Funktionen aufgebraucht, dann ist die erhaltene q-Funktion das gesuchte Resultat. Ist noch eine elementare q'-Funktion übrig, so ergibt sich in einem letzten Zusammensetzungsschritt ein verallgemeinerte q'-Funktion. Über die zu erwartenden Pole und Nullstellen dieser Funktion soll das folgende einfache Beispiel Aufschluss geben .

Im Falle eines Tiefpasses gilt :

$$q(s) = \frac{n(s)}{d(s)}\sqrt{s^2+1}\;; \quad q_0'(s) = \sqrt{\frac{s+j}{s-j}} \qquad q'(s) = \frac{n(s)\,(s+j) + d(s)}{n(s)\,(s-j) + d(s)}\sqrt{\frac{s-j}{s+j}}$$

In diesen Gleichungen sind $n(s)$ und $d(s)$ reelle Polynome, in diesem Falle das eine gerade, das andere ungerade. $q_0'(s)$ sei die elementare q'-Funktion. Es wird ferner gefordert, dass $n(s)$ und $d(s)$ keine gemeinsamen Nullstellen

besitzt. Als Bestimmungsgleichungen erhält man

für die Nullstellen :

$$\{[s\,n(s) + d(s)\,] + j\,d(s)\}\sqrt{s - j} = 0$$

für die Pole

$$\{[s\,n(s) + d(s)\,] - j\,d(s)\}\sqrt{s + j} = 0$$

für Pole und Nullstellen :

$$\{[s\,n(s) + d(s)\,]^2 + d^2(s)\}\sqrt{(s^2 + 1)} = 0$$

Aus diesen Gleichungen kann gefolgert werden :

(a) Keine Pole und Nullstellen auf der reellen Achse.

(b) Die Nullstellen und Pole liegen spiegelbildlich zueinander bezüglich der reellen Achse.

(c) Das Produkt der Gleichung für die Pole und der für Nullstellen besteht aus einem reellen geraden Polynom und einem irrationalen Faktor. Folglich haben Pole und Nullstellen eine quadrantische Symmetrie bezüglich des Ursprungs.

(d) Aus (b) und (c) folgt, dass sowohl Nullstellen als auch Pole eine spiegelbildliche Symmetrie bezüglich der imaginären Achse haben müssen.

(e) Aus (b) folgt, dass für reelle y $|q'(jy)|$ und $|q'(-jy)|$ reziprok zueinander sind.

(f) Aus (a) und (b) folgt, dass $|q'(s)| = 1$ für s = reell.

$q'(s)$ besitzt also die Eigenschaften einer verallgemeinerten q'-Funktion. Die gleichen Folgerungen ergeben sich auch im Fall beliebiger Filtertypen :

$$q(s) = \frac{n(s)}{d(s)}\,\frac{R_I(s)}{R_{II}(s)} \qquad \text{verallgemeinerte } q\text{-Funktion}$$

$$q_o'(s) = \frac{W_1(s)}{W_2(s)} \qquad \text{verallgemeinerte, elementare } q'\text{-Funktion}$$

worin mit a_i = reell , $\neq 0$

$$W_I(s) = \prod_1^n \sqrt{(s + j\,a_i)} \quad ; \qquad W_{II}(s) = \prod_1^n \sqrt{(s - j\,a_i)} \qquad (B - 24.3)$$

$$R_I(s) = \prod_1^m \sqrt{(s^2 + a_i^2)} \quad ; \qquad R_{II}(s) = \prod_{m+1}^n \sqrt{(s^2 + a_i^2)} \qquad (B - 24.4)$$

$$R_I(s)\, R_{II}(s) = W_I(s)\, W_2(s) = \prod_1^n \sqrt{(s^2 + a_i^2)} \qquad (B - 24.5)$$

und $0 \leq m \leq n$ ist. Die Zusammensetzung von $q(s)$ und $q_o'(s)$ ergibt

$$q'(s) = \frac{n(s)\, R_I(s)\, W_I(s) + d(s)\, R_{II}(s)\, W_2(s)}{n(s)\, R_I(s)\, W_2(s) + d(s)\, R_{II}(s)\, W_I(s)} \qquad (B - 24.6)$$

Nach dem Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke erhält man :

$$q'(s) = \frac{[n(s) \prod_1^m (s + j\,a_i) + d(s) \prod_{m+1}^n (s - j\,a_i)] \prod_1^m \sqrt{s - j\,a_i} \prod_{m+1}^n \sqrt{s + j\,a_i}}{[n(s) \prod_1^m (s - j\,a_i) + d(s) \prod_{m+1}^n (s + j\,a_i)] \prod_1^m \sqrt{s + j\,a_i} \prod_{m+1}^n \sqrt{s - j\,a_i}}$$

Daraus ergeben sich wieder wie oben die Folgerungen (a) – (f) u. z. aus den folgenden Gründen :

Folgerung (a) :

Für reelle s Werte kann weder der Ausdruck im Zähler noch der im Nenner verschwinden, vorausgesetzt , dass $n(s)$ und $d(s)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Sowohl im Zähler als auch im Nenner treten Ausdrücke der Form (B – 24.3 bis 5) auf die infolge a_i = reell und $\neq 0$ für reelle Werte von s komplexe und voneinander verschiedene endliche Werte annehmen. Somit kann sowohl der Zähler als auch der Nenner nur verschwinden, wenn gleichzeitig $n(s)$ und $d(s)$ zu Null werden.

Folgerung (b) :

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern sind Polynome mit komplexen Koeffizienten. Einander entsprechende Koeffizienden im Zähler – und im Nennerpolynom sind kon-

jugiert komplex zueinander. Daraus folgt, dass auch die Nullstellen des Zählers konjugiert zu denen des Nenners sind. Die konjugiert komplexe Lage der polartigen Verzweigungspunkte und der nullstellenartigen Verzweigungspunkte zueinander ist offensichtlich.

Folgerung (c) :

Das Produkt des Zählers und des Nenners ergibt ein Polynom mit reellen, geraden Koeffizienten multipliziert mit dem Faktor $\prod_1^n \sqrt{s^2 + a_i^2}$. Daraus folgt die quadrantische Symmetrie aller Singularitäten .

Die Folgerungen (d) – (f) ergeben sich unmittelbar aus (a) – (c).

Es muss nun nur noch gezeigt werden, dass das $q'(s)$ der Gleichung (B–24.6) geeignet ist, eine Funktion $K_0(s)$ analog der Gleichung (B–24) zu erzeugen. Dazu bildet man :

$$K_0(s) = \tfrac{1}{2} j \left[\frac{q'+1}{q'-1} + \frac{q'-1}{q'+1} \right]$$

$$K_0(s) = j \frac{[n^2(s) R_I^2 + d^2(s) R_{II}^2][W_I^2 + W_2^2] + 4\, n(s)\, d(s)\, R_I R_{II} W_I W_{II}}{[n^2(s) R_I^2 - d^2(s) R_{II}^2][W_I^2 - W_2^2]}$$

In diesem Ausdruck sind $n(s)$, $d(s)$, R_I^2 und R_{II}^2 Polynome mit reellen Koeffizienten. Das Produkt $R_I R_{II} W_I W_2$ ist infolge Gleichung (B–24.5) ebenfalls ein reelles Polynom. In den Ausdrücken W_I^2 und W_2^2 sind die reellen Koeffizienten paarweise gleich, die imaginären Koeffizienten haben paarweise entgegensetztes Vorzeichen. Daher wird $[W_I^2 + W_2^2]$ ein reelles Polynom, $[W_I^2 - W_2^2]$ ein imaginäres Polynom, dessen Faktor " j " man wegkürzen kann. $K_0(s)$ ist also eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten. In den Imaginärbereichen ist $|K_0(s)| \leq 1$. Es ist allerdings wieder nicht gewährleistet, dass alle Maxima und Minima von $|K_0(s)|$ wirklich die Schranken 0 und 1 erreichen.

B.4. Die q- und q'- Funktionen für spezielle Filtertypen.

B.4.1. Tiefpässe und Bandpässe.

Die herkömmlichen q- und q'- Funktionen für den Entwurf von Tiefpässen und Bandpässen sind in der Tabelle der Abb.B.4 zusammengestellt. Auf Grund der Überlegungen im vorigen Unterabschnitt lassen sich für Bandpässe die folgenden Funktionen hinzufügen :

$$q_i(s) = m_i\sqrt{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \qquad (B-25)$$

$$q_o'(s) = \sqrt{\frac{(s + ja)(s + jb)}{(s - ja)(s - jb)}} \qquad (B-26)$$

Wieweit die q-Funktion der Gleichung (B-25) praktische Bedeutung hat, bedarf einer näheren Untersuchung. Die q'-Funktion nach Gleichung (B-26) eignet sich zum erzeugen parametrischer Bandpässe ([Co - 1]), da sie beim Zusammensetzen ein Nullstelle auf der reellen Achse erzeugt. Darauf wird im Abschnitt C kurz zurückgekommen.

B.4.2. Bandsperren.

q-Funktionen für diesen Filtertyp wurden bisher nicht veröffentlicht. Begründet kann das damit werden, dass Bandsperren meist von einem geeigneten Bezugstiefpass abgeleitet werden. Dann allerdings ergibt sich ein frequenzsymmetrischer Verlauf der Dämpfung und der Phase.

Geeignete q-Funktionen für Bandsperren lassen sich leicht aus denen des Tief - passes ableiten. Wie in Abb.B.5 angedeutet, wird dazu die s_{tp}^2-Ebene durch die biquadratische Funktion $s_{tp}^2 = (s_{bs}^2 + b^2)/(s_{bs}^2 + 2a^2 - b^2)$ auf eine s_{bs}^2 - Ebene abgebildet. Das Resultat ist :

$$q_i(s) = \pm j\, m_i\sqrt{\frac{s^2 + b^2}{s^2 + a^2}} \qquad (B-27)$$

	Lage des Dämpfungspoles	m_i	Bereich für m_i	Elementare q-Funktion
Tiefpässe	$s_\infty = \pm j\,\omega_\infty \quad \lvert\omega_\infty\rvert > 1$	$m_i = \sqrt{1 - \omega_\infty^{-2}}$	$0 < m_i \leq 1$	$q_i(s) = \dfrac{m_i\, s}{\sqrt{s^2 + 1}}$
	$s = \pm\,\sigma_\infty$	$m_i = \sqrt{1 + \sigma_\infty^{-2}}$	$1 \leq m_i < \infty$	
	$s = \pm\,\sigma_\infty \pm j\,\omega_\infty$	$m_i = \dfrac{\sqrt{(\sigma_\infty + j\omega)^2 + 1}}{(\sigma_\infty + j\omega)}$ $m_i = m^{(r)} + j\,m^{(i)}$		$q_i(s) = \dfrac{(\lvert m_i\rvert^2 + 1)\, s^2 + 1}{2\, m^{(r)} s \sqrt{s^2 + 1}}$
			Elementare q'-Funktion :	$q_0'(s) = \sqrt{\dfrac{s + j}{s - j}}$
Bandpässe	$s = \pm\, j\,\omega_\infty$ — $0 \leq \omega_\infty < a$	$m_i = \sqrt{\dfrac{b^2 - \omega_\infty^2}{a^2 - \omega_\infty^2}}$	$b / a \leq m_i < \infty$	$q_i(s) = m_i \sqrt{\dfrac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}}$
	$s = \pm\, j\,\omega_\infty$ — $b < \omega_\infty \leq \infty$		$0 < m_i \leq 1$	
	$s = \pm\,\sigma_\infty$	$m_i = \sqrt{\dfrac{b^2 + \sigma_\infty^2}{a^2 + \sigma_\infty^2}}$	$1 \leq m_i \leq b / a$	
	$s = \pm\,\sigma_\infty \pm j\,\omega_\infty$	$m_i = \sqrt{\dfrac{(\sigma + j\omega)^2 + b^2}{(\sigma + j\omega)^2 + a^2}}$ $= m^{(r)} + j\,m^{(i)}$		$q_i(s) = \dfrac{\lvert m_i\rvert^2 (s^2 + a^2) + (s^2 + b^2)}{2 m^{(r)} \sqrt{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}}$
			Elementare q'-Funktion :	$q_0'(s) = \sqrt{\dfrac{(s - ja)(s + jb)}{(s + ja)(s - jb)}}$

Abb. B.4

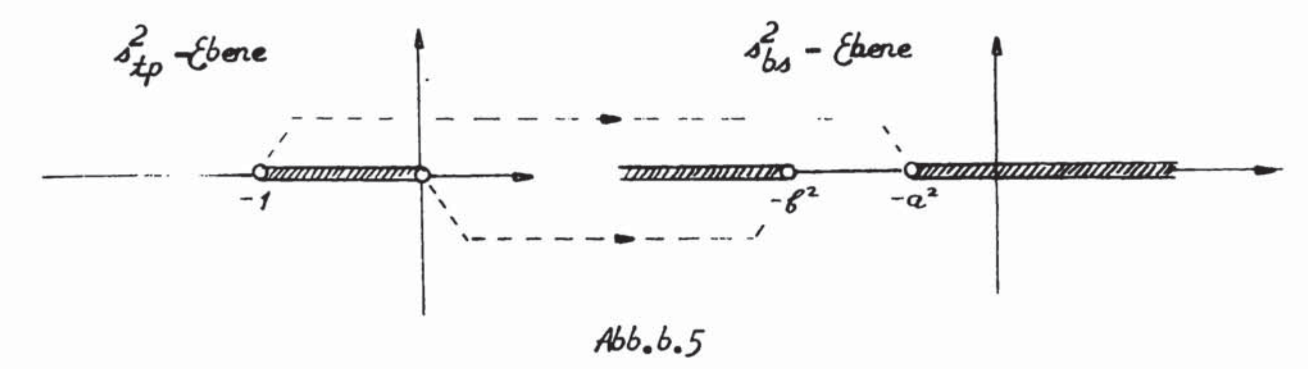


Abb.b.5

Formal ist das die q-Funktion eines Bandpasses, beaufschlagt mit dem Faktor " j ", also eine verallgemeinerte q-Funktion im Sinne des vorangehenden Abschnitts. Bei der Verwendung von $q_i(s)$ nach Gleichung (B-27) können sich Reflexionsnullstellen ergeben, die auf der reellen Achse liegen. Das ist natürlich unerwünscht. Ein einfaches Beispiel :

$a = 0,5 \quad ; \quad b = 2,0 \quad$; vorgeschriebener Dämpfungspol bei $\pm j$

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \pm j\, m_i \sqrt{\frac{s^2 + 4,0}{s^2 + 0,25}} \\ 1 &= \pm j\, m_i \sqrt{\frac{-1 + 4,0}{-1 + 0,25}} \end{aligned}\right\} m_i = 0,5 \longrightarrow \quad q_i = \pm j\, 0,5 \sqrt{\frac{s^2 + 4,0}{s^2 + 0,25}}$$

Daher :

$$K_0(s) = -\frac{0,75}{1,25}\,\frac{(s^2 - 1)}{(s^2 + 1)}$$

Man überzeugt sich leicht, dass $K_0(\,jb\,) = -1$ und $K_0(\,ja\,) = +1$ ist. Man bemerkt auch, dass das einzige Paar von Reflexionsnullstellen auf die Punkte $s = \pm 1$ der rellen Achse fällt.

Man wird beim Auslegen von Bandsperren natürlich versuchen, alle Reflexionsstellen in den Durchlassbereich zu bekommen. Man wird auch weiters Dämpfungspole bei 0 und ∞ anstreben, um die Realisierung zu erleichtern. Beides kann erreicht werden, wenn man eine Sperre als Filter mit zwei Durchlassbereichen auslegt. Darauf wird im Abschnitt D zurückgekommen.

B.4.3. Zusätzliche Bemerkungen.

Anstatt die Berechnungen in der angegebenen Art mit q- und q'-Funktionen auszuführen, hat Fettweis ([Fe-5]) ein Verfahren vorgeschlagen, das im wesentlichen einer ausschliesslichen Verwendung von q̇-Funktionen entspricht. Zu diesem Zweck wird jedem einzelnen Dämpfungspol eine elementare q'-Funktion zugeordnet. Für den Tiefpass gilt, z.B. :

$$q_\nu'(s) = m_\nu \sqrt{\frac{s+j}{s-j}} \qquad (B-28)$$

Aus der vorgeschriebenen Lage von $s_{\infty\nu}$ errechnet sich wieder m_ν :

$$q_\nu'(s_{\infty\nu}) = 1 \longrightarrow m_\nu = \sqrt{\frac{s_{\infty\nu} - j}{s_{\infty\nu} + j}} = m^{(r)} + j\, m^{(i)} \qquad (B-29)$$

Bei Reaktanzschaltungen muss es auch den Dämpfungspol $-s_{\infty\nu}$ geben, für den

$$q_{-\nu}'(-s_{\infty\nu}) = 1 \longrightarrow m_{-\nu} = \sqrt{\frac{-s_{\infty\nu} - j}{-s_{\infty\nu} + j}} = \frac{1}{m_\nu} \qquad (B-30)$$

gilt. Die Zusammenfassung von $q_\nu'(s)$ und $q_{-\nu}'(s)$ ergibt dann die q-Funktion eines Polpaares, das symmetrisch zum Ursprung liegt. War $s_{\infty\nu}$ komplex, ist auch der Zusatz des konjugiert-komplexen Paares notwendig.

Ergänzt man den komplexen Dämpfungspol durch sein komplexes Gegenstück in derselben Halbebene, so erhält man eine Polverteilung, der kein passiver Reaktanzvierpol mehr entspricht, da $P(s)$ weder gerade noch ungerade wird. Rechnet man trotzdem formal weiter, so ergeben sich der Reihe nach :

als q'-Funktion für $s_{\infty\nu}^*$: $\quad q_{\nu^*}' = \dfrac{1}{m_\nu^*} \sqrt{\dfrac{s+j}{s-j}}$

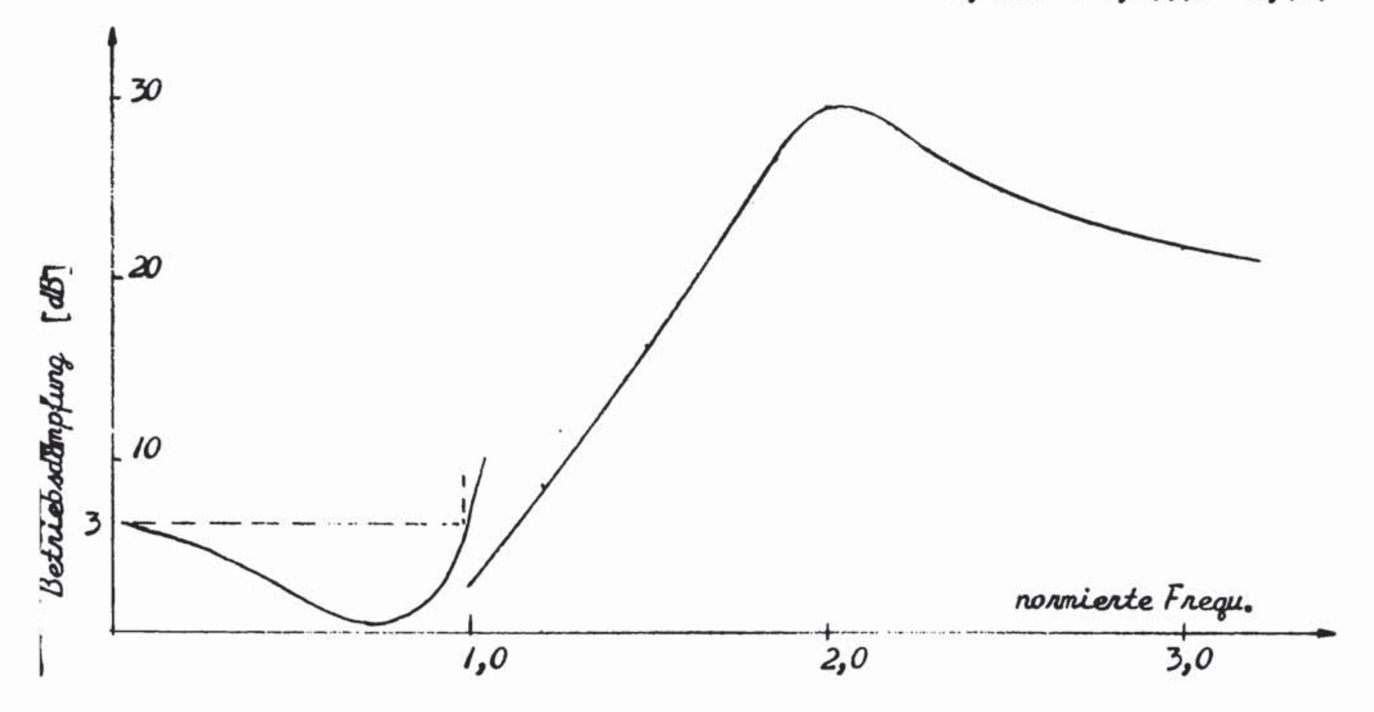
als Zusammensetzung mit q_ν' : $\quad q_{\nu*} = \dfrac{2\,(m^{(r)} s - m^{(i)})}{(|m|^2 + 1)\sqrt{s^2+1}}$

als char. Funktion : $K_o(s) = \frac{[4m^{(r)2}+(|m|^2+1)^2]s^2 - 8m^{(r)}m^{(i)}s + [4m^{(i)2}+(|m|^2+1)^2]}{[4m^{(r)2}-(|m|^2+1)^2]s^2 - 8m^{(r)}m^{(i)}s + [4m^{(i)2}-(|m|^2+1)]}$

Offensichtlich erfüllt $q_{v*}(s)$ nicht mehr die Definitionseigenschaft (b) der q-Funktionen Sie gehört einer neuen Klasse von Funktionen an, von denen die q-Funktionen eine Untergruppe sind. Da das Polpaar nicht auf der Achse sondern innerhalb der linken Halbebene liegt, können sie unter Umständen für aktive Filter mit weniger empfindlichen Dämpfungspolen brauchbar sein.

Ein numerisches Beispiel : vorgeschriebenes Polpaar bei $s_\infty = 0,2 \pm j\,2,0$

es ergibt sich : $K_o = \frac{3,144s^2 + 0,1771s + 1,799}{-0,442s^2 + 0,1771s - 1,787}$



B.5. Das Einführen von transformierten Variablen.

Das Aufstellen der charakteristischen Funktion in den Schritten:

$$q_i = q_i(s) \longrightarrow Q_i = \frac{q_i + 1}{q_i - 1} \longrightarrow Q = \prod Q_i \longrightarrow q = \frac{Q + 1}{Q - 1} \longrightarrow K_o = \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}$$

kann als aufeinanderfolgende konforme Abbildungen betrachtet werden. Für den Tiefpass sind die einzelnen Schritte in Abb.B.6 dargestellt. In allen Teilabbildungen ist der Durchlassbereich durch eine starke Linie hervorgehoben.
Es ist bemerkenswert, dass der Durchlassbereich im Zuge dieser Abbildungen teils auf die gesamte imaginäre Achse und teils auf den Einheitskreis abgebildet wird. Man kann daher erwarten, dass sich die Formeln vereinfachen lassen, wenn durch Substitution andere unabhängige Veränderliche eingeführt werden, die die Veränderliche s in ähnlicher Weise transformieren. Solche Transformationen sind:
(a) die bekannte z-Transformation, die für den Tiefpass die Form

$$z = \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad \rightleftarrows \quad s = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \qquad (B-31)$$

annimmt. Offensichtlich bewirkt diese Transformation eine Spreizung des Bereiches $-1 \leq \omega \leq +1$ auf die gesamte imaginäre Achse der z-Ebene. Diese und ähnliche Transformationen wurden von einer Reihe von Autoren für die gesamte Berechnung von Filtern eingeführt. ([Wa-1]; [Sz-1]; [Ot-1]; [Bi-1]; [(O-2]; [Fe-5]). Sie gestattet eine stark reduzierte Genauigkeit aller arithmetischen Operationen. Als zusätzlicher Vorteil ergibt sich ausserdem, dass der Logarithmus der reellen z-Achse identisch ist mit der Frequenzskala für das bekannte Schablonenverfahren von Rumpelt ([Ru-1]).
(b) die Transformation

$$w = \frac{s - \sqrt{s^2 + 1}}{s + \sqrt{s^2 + 1}} \quad \rightleftarrows \quad s = \frac{1}{2j}\left[\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}}\right] \qquad (B-32)$$

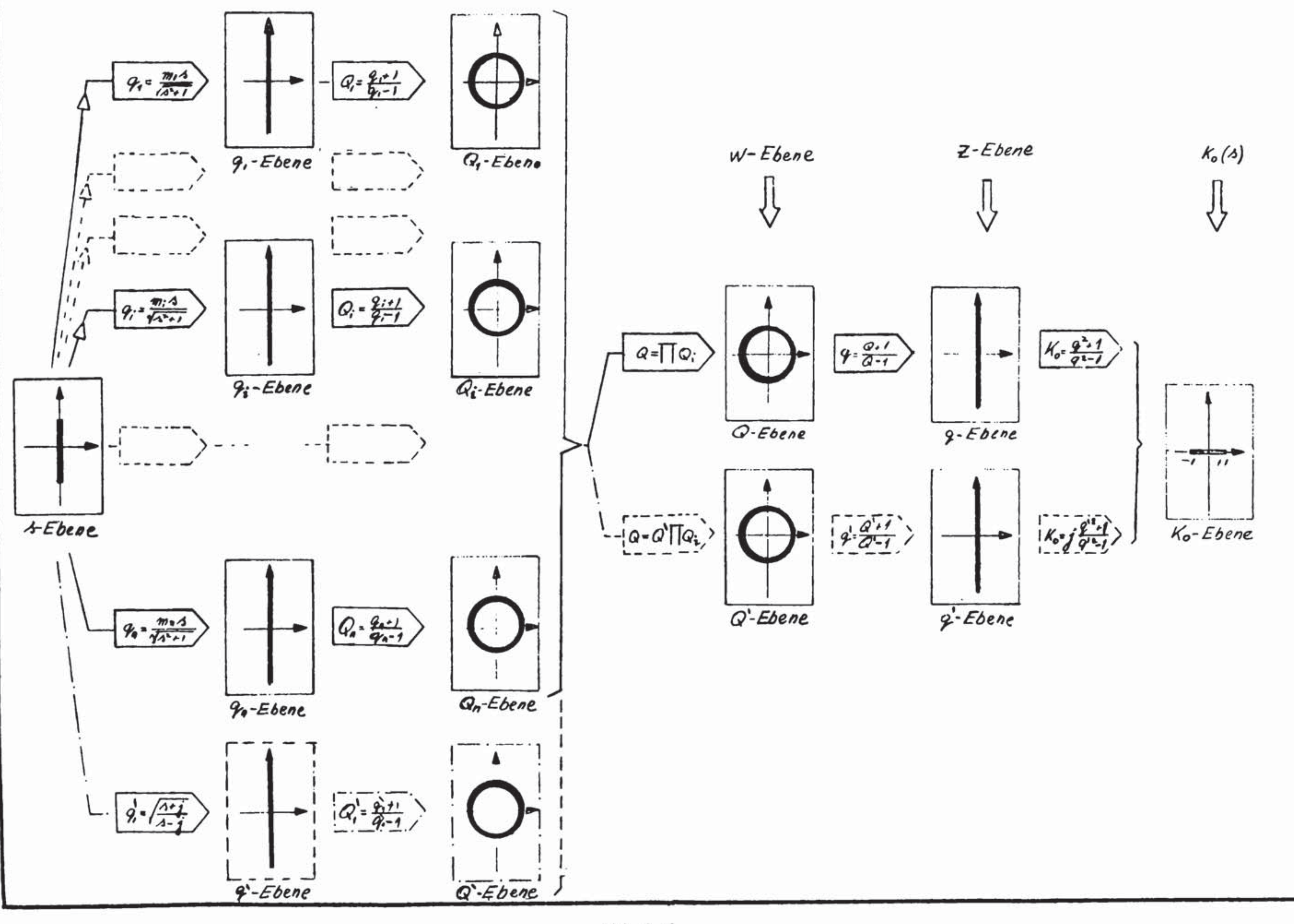
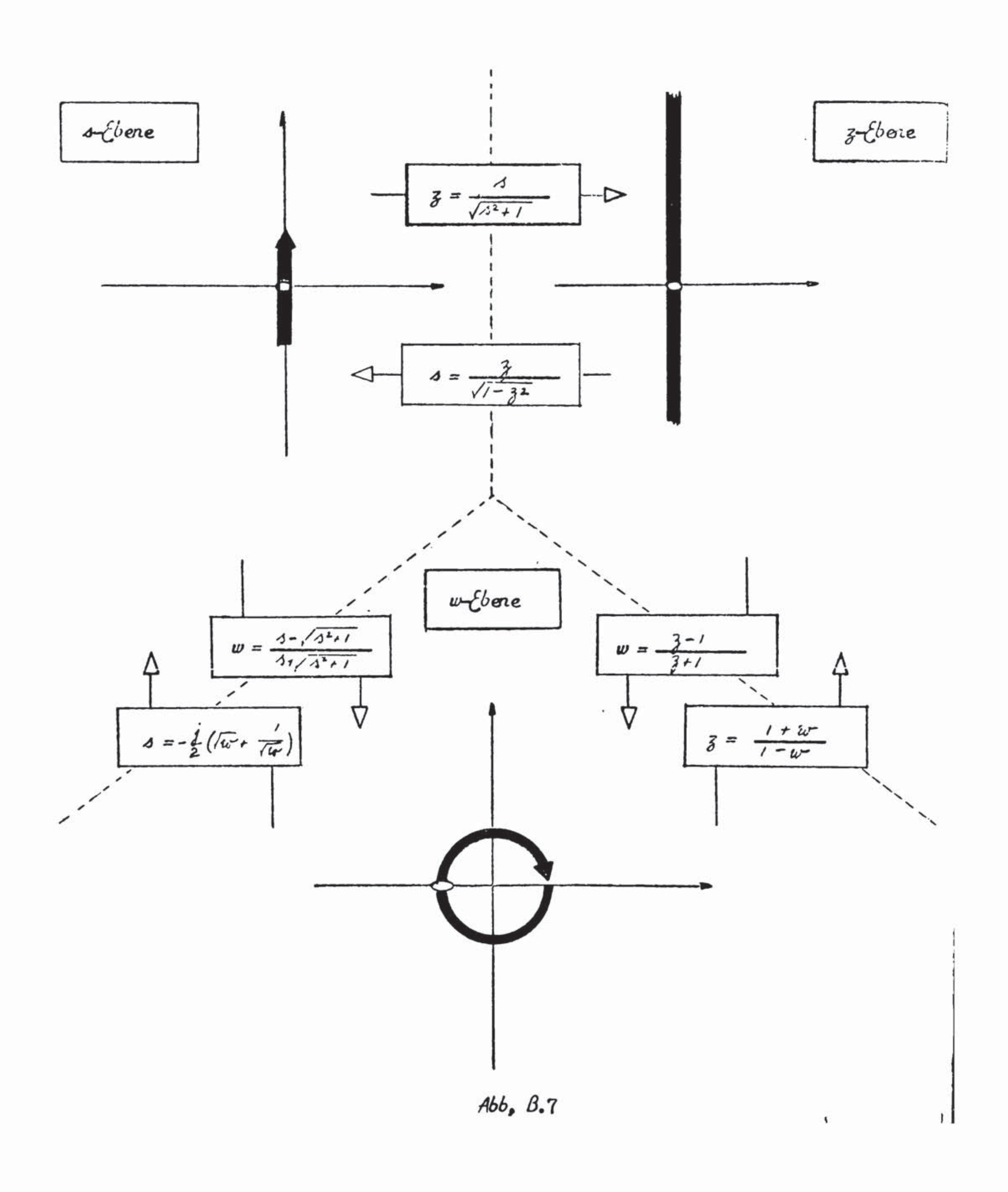

s-Ebene
q_1-Ebene
Q_1-Ebene
q_i-Ebene
Q_i-Ebene
q_n-Ebene
Q_n-Ebene
q'-Ebene
Q'-Ebene
$Q_i = \frac{q_i+1}{q_i-1}$
$Q_n = \frac{q_n+1}{q_n-1}$
$Q = \prod Q_i$
$Q = Q' \prod Q_i$
W-Ebene
Z-Ebene
$K_o(s)$
Q-Ebene
Q'-Ebene
$q = \frac{Q+1}{Q-1}$
$q' = \frac{Q'+1}{Q'-1}$
q-Ebene
q'-Ebene
$K_o = \frac{q^2+1}{q^2-1}$
K_o-Ebene

Abb.B.6



s-Ebene
z-Ebene
$z = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$
$s = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$
w-Ebene
$w = \frac{s-\sqrt{s^2+1}}{s+\sqrt{s^2+1}}$
$w = \frac{z-1}{z+1}$
$s = -\frac{j}{2}\left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}}\right)$
$z = \frac{1+w}{1-w}$

Abb. B.7

die als Alternative zur z-Transformation vorgeschlagen wird. Sie ergibt sich als Bilineartransformation der z-Ebene durch die Gleichung :

$$w = \frac{z-1}{z+1} \qquad z = \frac{1+w}{1-w} \qquad (B-33)$$

Durch die Gleichung (B-32) wird der normierte Durchlassbereich der s-Ebene $-1 \leq \omega \leq +1$ auf den Einheitskreis der w-Ebene abgebildet. Die paarweise Abbildung dieser drei Ebenen ist in Abb. B.7 dargestellt.
Durch differenzieren von Gleichung (B-32) findet man :

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta s}{s} \cdot \frac{2s}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (B-33.1)$$

Aus diesen Gleichung ist ersichtlich, dass der kritische Bereich um $s = \pm j$ in der w-Ebene gespreizt ist. Dadurch ergeben sich wie in der z-Ebene reduzierte Forderungen an die Genauigkeit der arithmetischen Operationen u.z. verursacht dadurch, dass in beiden Ebenenen die Pole und Nullstellen weit auseinandergezogen sind. Als Beispiel diene die charakteristische Funktion

$$K(s) = 16,1 \; \frac{s^6 + 1,718944\, s^4 + 0,80181\, s^2 + 0,010747}{(s^2 + 1,5^2)^3},$$

deren Pole und Nullstellen in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt sind.

	s-Ebene	z-Ebene	w-Ebene
Reflexions-nullstellen	± j 0,8017841	± j 1,3416427	+ 0,2857156 ± j 0,9583145
	± j 0,3382959	± j 0,3594916	− 0,7711117 ± j 0,6366998
	± j 0,9806340	± j 5,0070852	+ 0,9232861 ± j ,3841129
Dämpfungspole :	± j 1,5	± 1,3416427	± 6,8540687
Nullstellen von E(s) E(−s)	± 0,2593929 ± j 0,9342110	± 1,0214528 ± j 0,8698506	± 1,0566710 ± j 2,2978477
	± 0,6517280 ± j 0,5038626	± 0,6541547 ± j 0,2185327	± 2,5077466 ± j 2,8250263
	± 0,0661108 ± j 1,0526426	± 2,3293439 ± j 0,9918142	± 1,9664966 ± j 0,7210964

B.5.1. Die q-Funktionen des Tiefpasses in der z-Ebene.

Für die elementaren q- und q'-Funktionen des Tiefpasses gilt nach der Tabelle der Abb.B.4 :

$$q_i(s) = \frac{m_i\, s}{\sqrt{s^2+1}} \quad ; \quad q_0'(s) = \sqrt{\frac{s+j}{s-j}} \qquad (B-34)$$

daher in Verbindung mit Gleichung (B-31) :

$$q_i(z) = m_i\, z \quad ; \quad q_0'(z) = \sqrt{\frac{z+j\sqrt{1-z^2}}{z-j\sqrt{1-z^2}}} \qquad (B-35)$$

Die Zusammensetzung von n q-Funktionen liefert dann :

$$Q = \frac{q+1}{q-1} = \prod_n \frac{z+\mu_i}{z-\mu_i} = \frac{(z+\mu_1)(z+\mu_2)(z+\mu_3)\ldots}{(z-\mu_1)(z-\mu_2)(z-\mu_3)\ldots} = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad (B-36)$$

wobei

$$\mu_i = m_i^{-1} \quad ; \quad N(z) = \prod_n (z+\mu_i) \quad ; \quad D(z) = (-1)^n N(-z) \qquad (B-37)$$

gesetzt wurde.

Damit wird $K_o(z)$ für den antimetrischen Fall :

$$K_{oa}(z) = \frac{F_{oa}(z)}{P_{oa}(z)} = \frac{1}{2}[\,Q + Q^{-1}\,] = \frac{N^2(z) + D^2(z)}{2\,N(z)\,D(z)} \qquad (B-38)$$

Die zusammengesetzte q'-Funktion erhält man durch ein Zusatzglied in Gleichung (B-36) :

$$Q' = \frac{q+1}{q-1}\,\frac{q_0'+1}{q_0'-1} = \frac{N(z)}{D(z)}\;\frac{\sqrt{z+j\sqrt{1-z^2}} + \sqrt{z-j\sqrt{1-z^2}}}{\sqrt{z+j\sqrt{1-z^2}} - \sqrt{z-j\sqrt{1-z^2}}} \qquad (B-39)$$

Mit dieser Funktion berechnet man $K_o(z)$ für den symmetrischen Fall :

$$K_{os}(z) = \frac{F_{os}(z)}{P_{os}(z)} = \frac{1}{2}[\,Q' + Q'^{-1}\,] = \frac{z\,[\,N^2(z) + D^2(z)\,] + [\,N^2(z) - D^2(z)\,]}{2\,N(z)\,D(z)\,\sqrt{1-z^2}}$$

Also ist

$$\left.\begin{aligned} F_{os}(z) &= z F_{oa}(z) + [\, N^2(z) - D^2(z)\,] \\ \varphi_{os}(z) &= \varphi_{oa}(z)\sqrt{1 - z^2} \end{aligned}\right\} \qquad (B-40)$$

B.5.2. Die q-Funktionen des Tiefpasses in der w-Ebene.

Für die elementaren q- und q'-Funktionen erhält man in ähnlicher Weise aus den Gleichungen (B-33) bis (B-35) :

$$q_i = m_i \frac{1 + w}{1 - w} \quad ; \quad q_o' = \frac{1 - \sqrt{w}}{1 + \sqrt{w}} \qquad (B-41)$$

$$Q_i = \frac{q_i + 1}{q_i - 1} = \frac{(m_i - 1)\, w + (m_i + 1)}{(m_i + 1)\, w + (m_i - 1)} = \frac{N_i(w)}{D_i(w)} \qquad (B-42)$$

Die Zusammensetzung von n q-Funktionen ergibt :

$$Q = \prod Q_i = \prod \frac{N_i(w)}{D_i(w)} = \frac{N(w)}{D(w)} \qquad (B-44)$$

Damit wird $K_o(w)$ im antimetrischen Fall :

$$K_{oa}(w) = \frac{F_{oa}(w)}{\varphi_{oa}(w)} = \frac{N^2(w) + D^2(w)}{2\, N(w)\, D(w)} \qquad (B-45)$$

Die zusammengesetzten q'-Funktionen erfordern den Zusatz von Q_o' in Gleichung (B-44), wobei

$$Q_o' = \frac{q_o' + 1}{q_o' - 1} = \frac{1}{\sqrt{w}} \qquad (B-46)$$

ist. Daher :

$$Q' = Q_o' \prod Q_i = \frac{(\sqrt{w})^{-1}\, N(w)}{D(w)} \qquad (B-47)$$

Damit wird $K_o(w)$ im symmetrischen Fall:

$$K_o(w) = \frac{F_{os}(w)}{P_{os}(w)} = j \; \frac{(\sqrt{w})^{-1} N^2(w) + (\sqrt{w})\, D^2(w)}{2\, N(w)\, D(w)} \qquad (B-48)$$

Es ist denkbar, für die gesamte Filterberechnung in der w-Ebene ähnliche Methoden zu entwickeln, wie sie für die z-Ebene bereits veröffentlicht wurden ([Sz-1], [Ot-1], [Bi-1]). Wie dort kann man aus den bereits angeführten Gründen stark reduzierte Genauigkeitsforderungen für alle Rechenoperationen erwarten.
Der erste Schritt in solchen Methoden ist die Übertragung der Toleranzforderungen in die z- bzw. die w-Ebene. Für Bandpässe benützt man dazu an Stelle von Gleichung (B-31) die Transformation

$$z = \sqrt{\frac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}} \rightleftarrows s = \sqrt{\frac{z^2 b^2 - a^2}{1 - z^2}} \qquad (B-49)$$

die den Durchlassbereich und die beiden Sperrbereiche der s-Ebene respektive auf die gesamte imaginäre Achse und Teile der reellen Achse in der z-Ebene abbildet. Die konforme Abbildung zwischen der z-Ebene und der w-Ebene bleibt unverändert. Ausserdem gilt weiterhin $q_i = m_i z$ wie in Gleichung (B-35). Aus diesen beiden Gründen gelten in beiden Ebenen die gleichen Formel wie oben für die Approximationen mit q-Funktionen. Für q'-Funktionen werden die Ausdrücke komplizierter, haben aber ähnliche Struktur. Daraus ergeben sich dann auch Ausdrücke ähnlicher Struktur für die charakteristischen Funktionen. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

C. Die Wahl der Parameter für gegebene Anforderungen.

Soll ein vorgegebenes Approximationsproblem mit Hilfe von q-Funktionen gelöst werden, dann ist es notwendig, eine ausreichende Anzahl von geeigneten Parametern m_i zu wählen. Die Wahl der Parameter hängt von den jeweiligen Anforderungen ab. Bekannt sind die Methoden, bei denen diese Parameter einem vorgegebenen Satz von Dämpfungspolen zugeordnet sind. Implizit sind damit auch die Nullstellen und die Eigenfrequenzen bestimmt. Statt der Dämpfungspole können natürlich auch die Reflexionsnullstellen als Ausgangspunkt dienen oder eine Kombination beider. Schliesslich ist es auch denkbar, die Parameter einem vorgegebenen Satz von Eigenfrequenzen zuzuordnen. Alle diese Möglichkeiten werden in den folgenden Unterabschnitten behandelt.

C.1. Allgemeine Rekursionsformeln für vorgegebene Parameter.

Zur Berechnung der charakteristischen Funktion aus einem Satz vorgegebener elementarer q-Funktionen wurden in der Vergangenheit verschiedene Methoden veröffentlicht. Zum Teil handelt es sich dabei um explizite Berechnungsformeln geordnet nach Grad und Typ ([Fe-1],[Fe-2]), zum Teil um Rekursionsformeln für beliebigen Grad, aber verschieden nach Typ ([Fe-3],[Fe-4],[Fe-5]).
Die folgenden Rekursionsformeln gelten für beliebigen Grad und beliebigen Typ, einschliesslich der Filtertypen mit mehr als einem Durchlassbereich, die später noch behandelt werden sollen. Sie sind ausserdem sehr geeignet für die Programmierung eines digitalen Rechners.
Alle elementaren q-Funktionen können in der Form :

$$q_i(s) = m_i \frac{R_I}{R_{II}} \qquad (C-1)$$

geschrieben werden, wobei R_I und R_{II} die Wurzelausdrücke der folgenden Tabelle darstellen :

	TP	BP	TP / BP	BP / BP	
R_I	$\sqrt{s^2}$	$\sqrt{s^2 + a^2}$	$\sqrt{s^2 (s^2 + a^2)}$	$\sqrt{(s^2 + a^2)(s^2 + c^2)}$	etc.
R_{II}	$\sqrt{s^2 + 1}$	$\sqrt{s^2 + b^2}$	$\sqrt{s^2 + b^2}$	$\sqrt{(s^2 + b^2)(s^2 + d^2)}$	

In den beiden letzten Spalten stehen die q-Funktionen der schon erwähnten Filter mit mehr als einem Durchlassbereich. Nach der Zusammensetzungsregel gilt :

(B-14),(C-1) :
$$Q = \frac{q+1}{q-1} = \prod \frac{m_i R_I + R_{II}}{m_i R_I - R_{II}} \qquad (C-2)$$

Die Durchführung der entsprechenden Rechenoperationen ergibt immer ein Q der Form :

$$Q = \frac{A_n(s) + B_n(s) R_{II} + C_n(s) R_I + D_n(s) R_I R_{II}}{A_n(s) - B_n(s) R_{II} + C_n(s) R_I - D_n(s) R_I R_{II}} \qquad (C-3)$$

In dieser Gleichung sind $A_n(s)$, $B_n(s)$, $C_n(s)$ und $D_n(s)$ Polynome, die für die besonderen Werte $n = 1$ und 2 und allgemein für n = gerade oder ungerade in der Tabelle der Abb. C.1 enthalten sind.

n	$A_n(s)$	$B_n(s)$	$C_n(s)$	$D_n(s)$
1	0	1	m_1	0
2	$m_1 m_2 R_I^2 + R_{II}^2$	0	0	$m_1 + m_2$
ungerade	0	$A_{n-1}(s) + m_n D_{n-1}(s) R_I^2$	$m_n A_{n-1}(s) + D_{n-1}(s) R_{II}^2$	0
gerade	$B_{n-1}(s) R_{II}^2 + m_n C_{n-1}(s) R_I^2$	0	0	$m_n B_{n-1}(s) + C_{n-1}(s)$

Abb. C.1

Es gilt daher :

$$Q = \frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2} \qquad (C-4)$$

wobei

$$T_1 = A_n(s) \quad ; \quad T_2 = D_n(s)\, R_I R_{II} \qquad \text{wenn } n = \text{gerade}$$
$$T_1 = C_n(s)\, R_I \quad ; \quad T_2 = B_n(s)\, R_{II} \qquad \text{wenn } n = \text{ungerade} \qquad (C-5)$$

Mit diesen Ausdrücken errechnet man $K_o(s)$ im antimetrischen Fall :

$$K_{oa}(s) = \frac{F_{oa}(s)}{P_{oa}(s)} = \tfrac{1}{2}\left[Q + \frac{1}{Q}\right] = \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \qquad (C-6)$$

$$K_{oa}(s) \begin{cases} = \dfrac{A_n^2(s) + D_n^2(s)\, R_I^2\, R_{II}^2}{P_{oa}(s)} & \text{wenn } n = \text{gerade} \quad (C-7) \\[2ex] = \dfrac{B_n^2(s)\, R_{II}^2 + C_n^2(s)\, R_I^2}{P_{oa}(s)} & \text{wenn } n = \text{ungerade} \quad (C-8) \end{cases}$$

Die Berechnung des Nennerpolynoms $P_{oa}(s)$ geschieht einfacher durch seine bekannten Wurzelfaktoren anstatt aus $T_1^2 - T_2^2$. Ein Zahlenbeispiel für ein Filter mit zwei Durchlassbereichen wird später gebracht.
In Analogie zu Gleichung (C-1) gilt für die elementaren q'-Funktionen :

$$q_o' = \frac{W_1}{W_2} \quad ; \quad Q_o' = \frac{q_o' + 1}{q_o' - 1} = \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2} \qquad (C-9)$$

Für die verschiedenen Filtertypen ist W_1 in der folgenden Tabelle zusammengestellt. W_2 ist der Wurzelausdruck mit den zu W_1 konjugiert-imaginären Nullstellen

	TP	BP	TP / BP	BP / BP	etc.
W_1	$\sqrt{(s+ja)}$	$\sqrt{(s+ja)(s\mp jb)}$	$\sqrt{(s+j)(s\mp ja)(s\pm jb)}$	$\sqrt{(s+ja)(s\mp jb)(s\pm jc)(s\mp jd)}$	

Abgesehen von den reziproken Formen gibt es für jeden Typ insgesamt " k " mögliche elemetare q'-Funktionen, wobei

$$k = 2^{(d-1)}$$

ist und " d " die Anzahl der zusammenhängenden Durchlassbereiche auf der imaginären Achse ist. Die verschiedenen Formen kommen durch die Wahl der Vorzeichen in den Wurzelfaktoren von W_1 zustande. Über eine geeignete Wahl wird später gesprochen. Da jedes Paar konjugierten Wurzelfaktoren aus W_1 und W_2 immer einem Faktor aus R_I oder R_{II} gleich ist (siehe Gl.(B-24.3 und 4)), muss die Bedingung

$$R_I R_{II} = W_1 W_2 \qquad (C-10)$$

erfüllt sein.

Als Hilfsfunktion bildet man zunächst $K'_{os}(s)$, die charakteristische Funktion aus einer einzigen elementaren q'-Funktion :

$$K'_{os}(s) = \frac{F'_{os}(s)}{P'_{os}(s)} = \frac{j}{2}\left[Q'_0 + \frac{1}{Q'_0} \right] = j\,\frac{W_1^2 + W_2^2}{W_1^2 - W_2^2} \qquad (C-11)$$

Für die gesuchte charakteristische Funktion benötigt man sodann Q' :

$$(C-4),(C-9): \qquad Q' = Q\,Q'_0 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2}\cdot\frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2} \qquad (C-12)$$

Mit diesem Ausdruck errechnet man $K_o(s)$ im <u>symmetrischen Fall</u> auf die folgende Weise :

$$K_{os}(s) = \frac{F_{os}(s)}{P_{os}(s)} = \frac{j}{2}\left[Q' + \frac{1}{Q'}\right] = j\,\frac{(T_1^2 + T_2^2)(W_1^2 + W_2^2) + 4\,T_1 T_2 W_1 W_2}{(T_1^2 - T_2^2)(W_1^2 - W_2^2)} \qquad (C-13)$$

Mit Berücksichtigung von (C-6),(C-10) und (C-11) erhält man :

$$K_{os}(s) = \frac{F_{oa}(s)\,F'_{os}(s) + \Delta F(s)}{P_{oa}(s)\,P'_{os}(s)} \qquad (C-14)$$

also als Produkt

der antimetrischen charakteristischen Funktion, die aus den vorgeschriebenen Polpaaren gebildet wurde, und

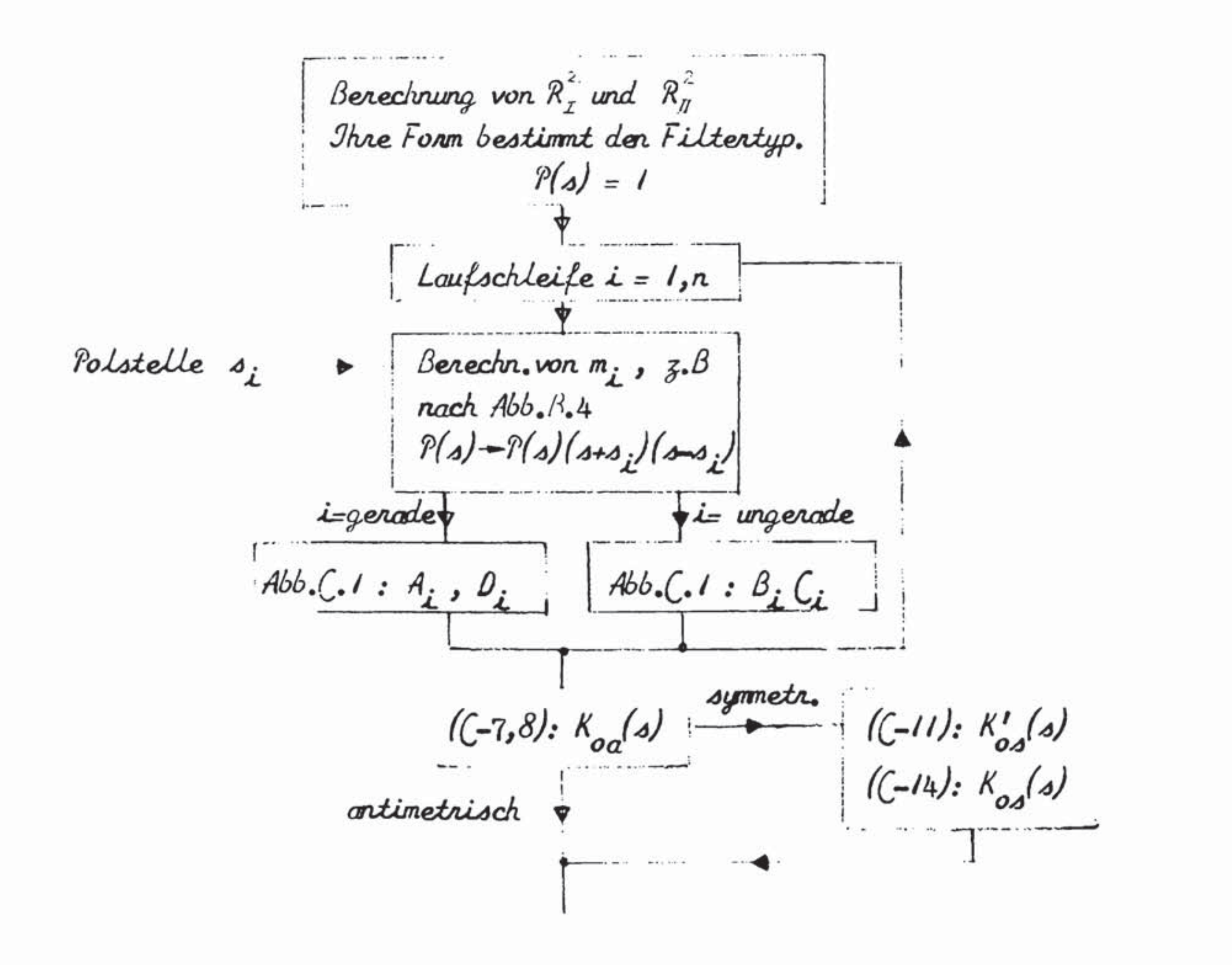
der Hilfsfunktion $K'_{os}(s)$ die für die einfachen Pole bei 0 und ∞ verantwortlich ist,

unter Berücksichtigung eines Korrekturgliedes $\Delta F(s)$ im Zähler :

$$\Delta F(s) = \begin{cases} = 4\ A_n(s)\ D_n(s)\ R_I^2\ R_{II}^2 & \text{wenn } n = \text{gerade} \\ = 4\ B_n(s)\ C_n(s)\ R_I^2\ R_{II}^2 & \text{wenn } n = \text{ungerade} \end{cases} \qquad (C-15)$$

Es soll noch bemerkt werden, dass $K'_{os}(s)$ bei Filtern mit mehr als einem Durchlassbereich auch Dämpfungspolpaare bei endlichen Frequenzen beitragen kann. Darauf wird im Abschnitt D zurückgekommen. In diesem Abschnitt ist auch ein Zahlenbeispiel vorgesehen.

<u>Rechenprogramm :</u>



C.2. Betrachtungen über Reflexionsnullstellen.

C.2.1. Die Bedingungen für Reflexionsnullstellen im Durchlassbereich.

Aus den Gleichungen (B-16) und (B-24) folgt unmittelbar, dass für Reflexionsnullstellen die Bedingung

$$q = \pm j \quad \text{oder} \quad q' = \pm j \qquad (C-16)$$

erfüllt sein muss. In den Durchlassbereichen sind alle q- und q'-Funktionen rein imaginär und es ist daher sinnvoll und zweckmässig, einen Winkel φ folgendermassen zu definieren :

$$\varphi = \begin{cases} = \arg \dfrac{q+1}{q-1} & \text{für antimetrische Filter} \qquad (C-17) \\ = \arg \dfrac{q'+1}{q'-1} & \text{für symmetrische Filter} \qquad (C-18) \end{cases}$$

Aus den Gleichungen ((C-16) bis ((C-18) folgt :

$$\varphi = (2v-1)\frac{\pi}{2} \qquad v = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (C-19)$$

für Reflexionsnullstellen. Setzt man die q- oder q'-Funktionen aus solchen elementaren Gliedern zusammen, denen man Glieder der Wellenparametertheorie zuordnen kann, dann ist entsprechend den Gleichungen (B-12) und (B-17) die Gesamtphase einer Kette dieser Glieder. Die Reflexionsnullstellen liegen dann bei den Frequenzen, an denen $\varphi = (2v-1)\frac{\pi}{2}$ ist. Darauf hat bereits Rumpelt hingewiesen und zur Bestimmung der Gesamtphase sein bekanntes Schablonenverfahren vorgeschlagen ([Ru-1],[Ru-2]). Ein Schablonenverfahren mittels Phasenüberlegungen war auch von Fettweis([Fe-3],Lit.[45]) angekündigt worden. Insbesonders hat Fettweis in einer unveröffentlichten Arbeit gezeigt, dass mit Hilfe der Steigung der Phase φ bei den durch Gl.((C-19) gegebenen Frequenzen eine verbesserte Approximation der Lage der Nullstellen des Polynoms E(s) gefunden werden kann.

Die Phasenbedingung ((C-19) bleibt aber auch dann sinnvoll, wenn verallgemeinerte q- und q'-Funktionen benützt werden. Definiert man

$$\varphi_i = \arg \frac{q_i + 1}{q_i - 1} = -2 \operatorname{atan} \frac{1}{j} q_i - 180° = -2 \operatorname{atan} \frac{j}{q_i} \qquad (C-20)$$

$$\varphi_0' = \arg \frac{q_0' + 1}{q_0' - 1} = -2 \operatorname{atan} \frac{1}{j} q_0' - 180^\circ = -2 \operatorname{atan} \frac{j}{q_0'} \qquad (C-21)$$

als Teilphasenkurven, die man den elementaren q- und q'-Funktionen zuordnet, so wird

$$\varphi = \sum \varphi_i + [\varphi_0'] \qquad (C-21)$$

wobei φ_0' nur bei symmetrischen Filter auftritt.

Für <u>Tiefpässe</u> gilt nach Abb.B.4 :

$$\varphi_i = -2 \operatorname{atan} \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{m_i\,\omega} \quad ; \qquad \varphi_0' = -2 \operatorname{atan} \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}} \qquad (C-22)$$

Die entsprechenden Phasenkurven sind in Abb.C.2 dargestellt.

Für <u>Bandpässe</u> gilt nach Abb.B.4 und Gleichung (B-26) :

$$\varphi_i = -2 \operatorname{atan} \frac{1}{m_i} \sqrt{\frac{b^2-\omega^2}{\omega^2-a^2}} ; \qquad \varphi_0' = -2 \operatorname{atan} \sqrt{\frac{(\omega+a)(b-\omega)}{(\omega-a)(b+\omega)}} \qquad (C-23)$$

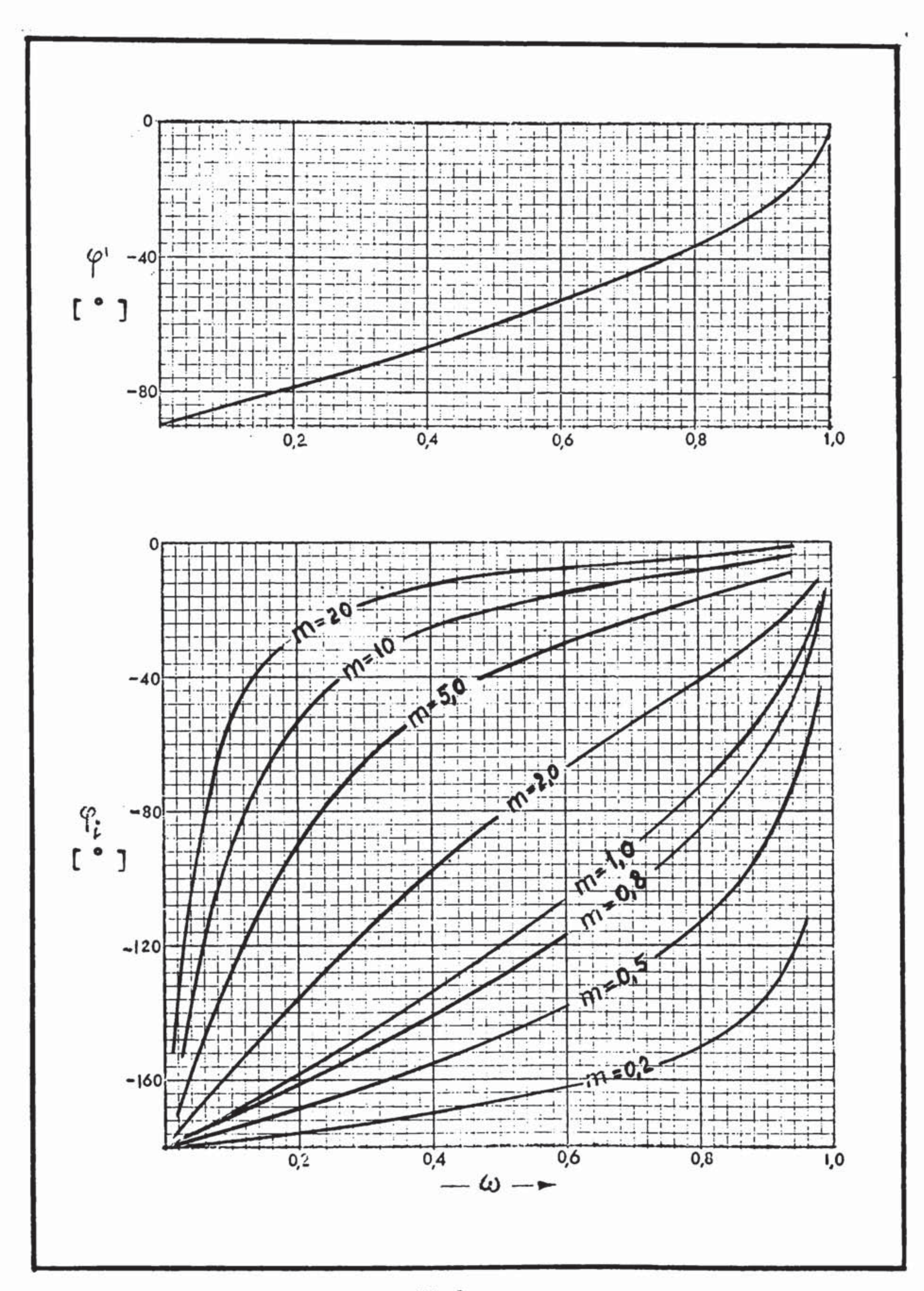
$$(B\text{-}26): \qquad \varphi_0'' = -2 \operatorname{atan} \sqrt{\frac{(\omega-a)(b-\omega)}{(\omega+a)(b+\omega)}} \qquad (C-24)$$

Um in diesen beiden Filtertypen einen maximalen Phasenwinkel φ und damit eine maximale Zahl der Reflexionsnullstellen zu erzielen, ist es notwendig,

(a) allen m_i positives Vorzeichen zu geben, und

(b) nur solche elementaren q'-Funktionen zu verwenden, die im Durchlassbereich eine Phasenänderung von 90° (beim Tiefpass) oder 180° (beim Bandpass) beitragen.

Die letzte Bedingung wird beim Bandpass mit den Teilphasenkurven nach den Gleichungen (C-23) erfüllt, nicht aber mit einer q'-Funktion mit der Teilphasenkurve nach Gleichung (C-24). Deren Phasenverlauf ist in Abb.C.3 dargestellt. Er ist dafür verantwortlich, dass diese " parametrische q-Funktion " Nullstellen auf der reellen Achse und nicht im Durchlassbereich erzeugt.



0
-40
-80
φ'
[°]
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
0
-40
-80
-120
-160
φi
[°]
m=20
m=10
m=5,0
m=2,0
m=1,0
m=0,8
m=0,5
m=0,2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
— ω —►

Abb. C-2

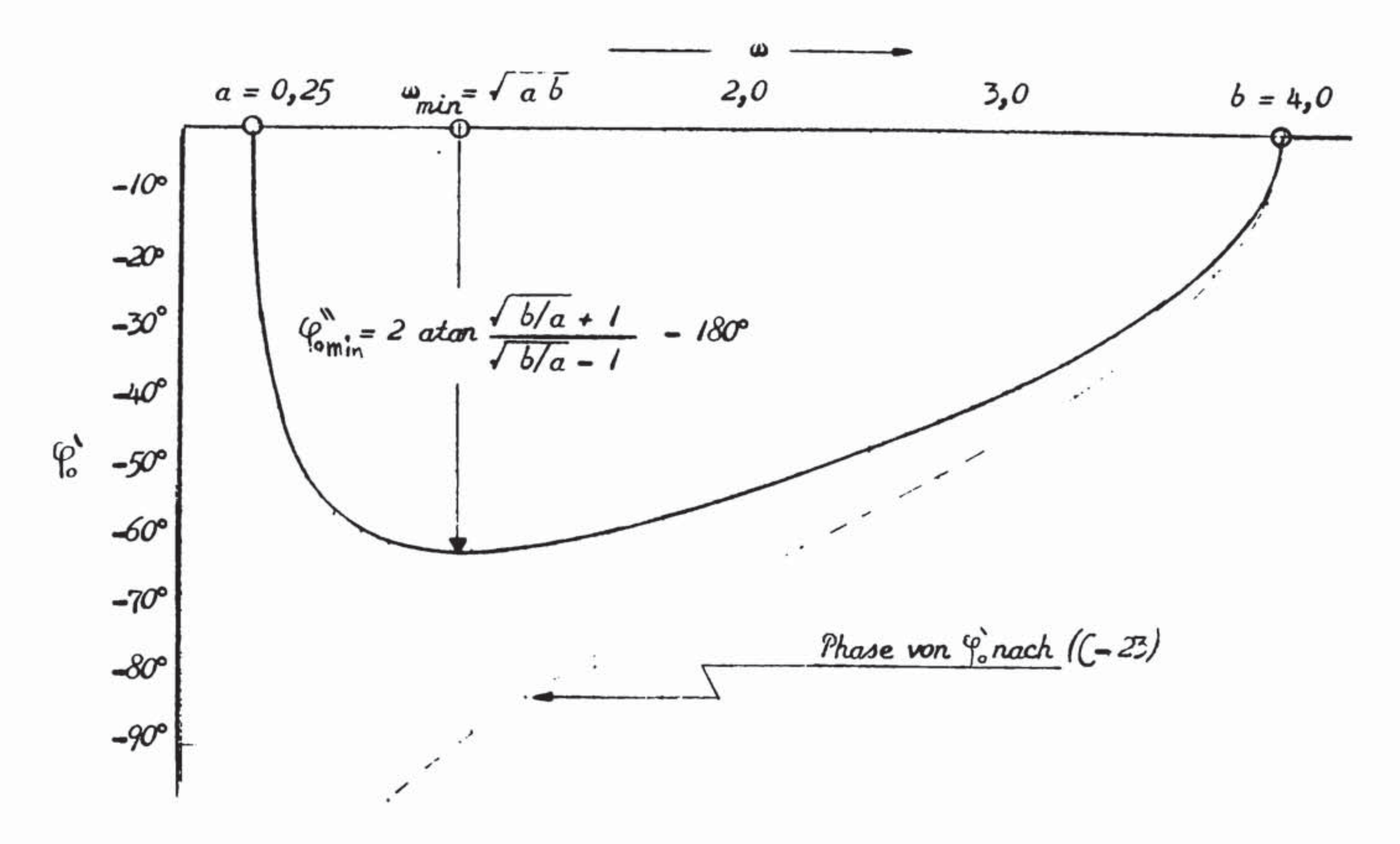


Abb. C.3.

C.2.2. Die algebraische Bestimmung der Reflexionsnullstellen.

Für die algebraische Berechnung der Reflexionsnullstellen ist die z-Ebene am zweckmässigsten. Die folgenden Betrachtungen gelten für antimetrische Tiefpässe und Bandpässe.

$$(B\text{-}36),(C\text{-}16): \quad q(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{z^n + (\sum \mu_i \mu_j)\, z^{n-2} + ..}{(\sum \mu_i)\, z^{n-1} + (\sum \mu_i \mu_j \mu_k)\, z^{n-3} ..} = \pm j$$

worin wieder $\mu_i = m_i^{-1}$ gesetzt wurde. Daraus folgt :

$$q^2(z) = -1 \longrightarrow [\, n(z) + j\, d(z)\,]\,[\, n(z) - j\, d(z)\,] = 0 \qquad (C-24)$$

Offensichtlich gilt :

$$[\, n(z) + j\, d(z)\,] = 0 \qquad (C-25)$$

$$[\, n(z) - j\, d(z)\,] = 0 \qquad (C-26)$$

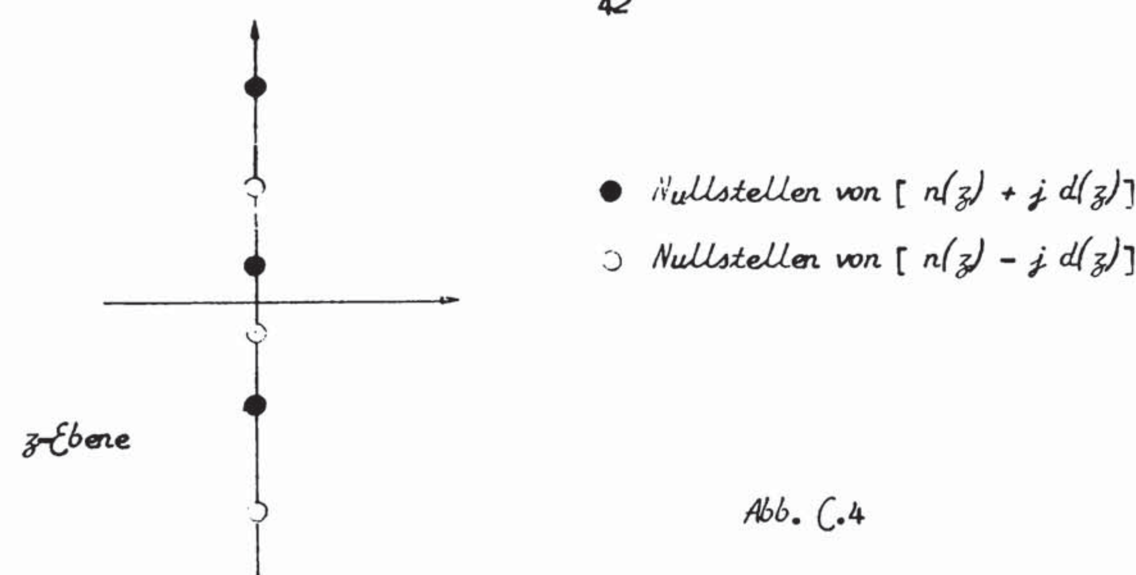


Abb. C.4

Diese Bestimmungsgleichungen folgen auch direkt aus den Bedingungen $q(z) = -j$ bzw. $+j$ für Reflexionsnullstellen. Aufeinanderfolgende Nullstellen auf der imaginären Achse erfüllen abwechselnd die eine und die andere dieser Bedingungen. Das folgt aus der Phasendifferenz von 180° nach Gl.(C-19) und Gl.(C-17) für aufeinanderfolgende Nullstellen. Da ausserdem von den beiden Polynomen $n(z)$ und $d(z)$ das eine gerade das andere ungerade ist, erfüllt die eine Nullstelle die Gleichung (C-25), die zu ihr konjugierte Nullstelle die Gl.(C-26). Aus diesen Gründen ergibt sich für die Nullstellen eine Anordnung, wie sie in Abb.C.3 gezeigt ist, und man kann sich darauf beschränken, die Nullstellen von Gl.(C-25) zu berechnen. Mit $z = jZ$ ergibt das die Bestimmungsgleichung :

$$Z^{n} + (\sum \mu_i) Z^{n-1} - (\sum \mu_i \mu_j) Z^{n-2} - (\sum \mu_i \mu_j \mu_k) Z^{n-3}$$

$$+ + - - \quad \ldots\ldots = 0 \qquad (C-27)$$

Fü symmetrische Filter werden die Bestimmungsgleichungen komplizierter und ausserdem auch abhängig vom Filtertyp. Es sei zunächst ganz allgemein :

$$q(z) = \frac{n(z)}{d(z)} \quad ; \quad q_0'(z) = \frac{W_1(z)}{W_2(z)}$$

eine zusammengesetzte q-Funktion bzw. eine elementare q'-Funktion, z.B. eine solche nach Gleichung (B-35) . Die zusammengesetzte q'-Funktion ist dann :

$$q'(z) = \frac{n'(z)}{d'(z)} = \frac{n(z)\,W_1(z) + d(z)\,W_2(z)}{n(z)\,W_2(z) + d(z)\,W_1(z)} \qquad (C-28)$$

Die Bedingung $q'^2(z) = -1$ führt auf

$$[n^2(z) + d^2(z)]\,[W_1^2(z) + W_2^2(z)] + 4\,n(z)\,d(z)\,W_1(z)\,W_2(z) = 0 \qquad (C-29)$$

Für Tiefpässe ist

$$\left.\begin{aligned} W_1(z) &= \sqrt{z + \sqrt{1 - z^2}} \\ W_2(z) &= \sqrt{z - \sqrt{1 - z^2}} \end{aligned}\right\} \quad W_1^2(z) + W_2^2 = 2\,z \;;\; W_1(z)\,W_2(z) = 1$$

Daher wird (C-29) :

$$[n^2(z) + d^2(z)]\,z + 2\,n(z)\,d(z) = 0 \qquad (C-30)$$

Da entweder $n(s)$ oder $d(s)$ ungerade ist, enthalten alle Glieder den Faktor z und daher eine Nullstelle bei $z = 0$.

C.2.3. Vorgeschriebene Reflexionsnullstellen bei antimetrischen Filtern.

Die einfache Struktur der Gl.(C-27) gestattet es, auch umgekehrt von vorgeschriebenen Nullstellen und gleichmässiger Welligkeit im Durchlassbereich die zugeordneten Dämpfungspole zu bestimmen. Zu diesem Zweck werden diese Nullstellen zunächst in die z-Ebene übertragen. Dazu dient Gl.(B-31) beim Tiefpass bzw. (B-49) beim Bandpass. Aufeinanderfolgende Nullstellen Z_{oi} erhalten abwechselndes Vorzeichen. Sodann bildet man das Produkt der Wurzelfaktoren:

$$\prod_{i=1}^{n}(Z - Z_{oi}) = Z^{n} - (\sum Z_{oi}) Z^{n-1} + (\sum Z_{oi} Z_{oj}) Z^{n-2} - + \ldots \quad (C-31)$$

$$= Z^{n} + c_{n-1} Z^{n-1} + c_{n-2} Z^{n-2} + \ldots \quad (C-32)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung (C-27) findet man :

$$\left.\begin{aligned} c_{n-1} &= -(\sum Z_{oi}) &&= +(\sum \mu_i) &&= -M_{n-1} \\ c_{n-2} &= +(\sum Z_{oi} Z_{oj}) &&= -(\sum \mu_i \mu_j) &&= -M_{n-2} \\ c_{n-3} &= -(\sum Z_{oi} Z_{oj} Z_{ok}) &&= -(\sum \mu_i \mu_j \mu_k) &&= +M_{n-3} \\ &\ldots\ldots && \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (C-33)$$

Die M_i sind die Koeffizienten eines Polynoms in μ, dem man die gesuchten Parameter μ_v als Wurzeln zuordnet :

$$\prod_{v=1}^{n}(\mu - \mu_v) = \mu^{n} - (\sum \mu_i)\mu^{n-1} + (\sum \mu_i \mu_j)\mu^{n-2} - + \ldots \quad (C-34)$$

$$= \mu^{n} + M_{n-1}\mu^{n-1} + M_{n-2}\mu^{n-2} + \ldots \quad (C-35)$$

Es gilt also :

$$\begin{aligned} M_n &= +c_n = 1 \\ M_{n-1} &= -c_{n-1} \\ M_{n-2} &= -c_{n-2} \\ M_{n-3} &= +c_{n-3} \\ M_{n-4} &= +c_{n-4} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (C-36)$$

Es ist also lediglich notwendig, die bekannten Koeffizienten der Gleichung (C-32) nach dem Schema der Gleichungen (C-36) zu ändern und aus dem so geformten Polynom die Nullstellen zu bestimmen. Deren Reziprokwerte sind die gesuchten m_i-Werte.

Zahlenbeispiel :

Es seien die Nullstellen eines Cauerparameterfilters C 04 a, $\Theta = 10°$ vorgeschrieben :

$$\omega_{01} = 0{,}385185 \qquad \omega_{02} = 0{,}924910$$

(B - 31) : $Z_{01} = 0{,}41739116 \qquad Z_{02} = -2{,}43278208$

(C - 32) : $Z^2 - 2{,}01539092\,Z - 1{,}01542174 = 0$

(C - 35) : $\mu^2 + 2{,}01539092\,\mu + 1{,}01542174 = 0$

Nullstellen : $\mu_1 = -1{,}00236632 \qquad \mu_2 = -1{,}01302460$

m-Werte : $m_1 = -0{,}99763927 \qquad m_2 = -0{,}98714286$

→ Pole : $\omega_1 = 14{,}561905 \qquad \omega_2 = 6{,}25623723$

Diese Pole stimmen nur auf etwa 3 Dezimalstellen mit den tabulierten Werten überein. Der Grund dafür ist, dass die Lage der Pole äusserst stark von geringen Verschiebungen der Nullstellen beeinflusst wird. Die folgende Tabelle sei ein Beispiel.

ω_{01}	ω_{02}	$s_{\infty 1}$	$s_{\infty 2}$
0,385175	0,924910	25,08217 + j 0,0	0,0 + j 5,623258
0,385177	↓	43,57982 + j 0,0	0,0 + j 5,715919
0,385179		0,0 + j 40,45415	0,0 + j 5,820657
0,385181		0,0 + j 23,29975	0,0 + j 5,941142
0,385183		0,0 + j 17,69204	0,0 + j 6,083092
→ 0,385185		0,0 + j 14,56190	0,0 + j 6,256237
0,385187		0,0 + j 12,41094	0,0 + j 6,479496
0,385189		0,0 + j 10,70359	0,0 + j 6,799686
0,385191		0,0 + j ,99979	0,0 + j 7,441882
0,385193		± 1,254570 ± j 7,797111	
0,385195	↓	± 1,766678 ± j 7,448313	

C.2.4. Vorgeschriebene Kombinationen von Dämpfungspolen und Reflexionsnullstellen bei antimetrischen Filtern.

Bei der Berechnung einer beträchtlichen Anzahl praktischer Beispiele für den Unterabschnitt C.2.3 hat sich gezeigt, dass die Lage der sich ergebenden Dämpfungspole in den meisten Fällen sehr ungünstig für das Sperrverhalten ist. Die Tabelle auf Seite 45 zeigt aber auch, dass bereits geringfügige Verschiebungen der Reflexionsnullstellen zu wesentlichen Änderungen der Polverteilung führen. Infolge der grossen Mannigfaltigkeit der mögliche Polverteilungen erscheint es naheliegend, von den insgesamt n Polpaaren einen Teil m an geeigneten Stellen festzulegen und statt dieser die Lage einer gleichen Anzahl von Reflexionsnullstellen zu berechnen. Man schreibt also die Lage von $(n - m)$ Reflexionsnullstellen und m Dämpfungspolen vor und berechnet die Lage von m Reflexionsnullstellen und $(n - m)$ Dämpfungspolen. Durch geeignete Wahl der Dämpfungspole erreicht man ein besseres Sperrverhalten, durch eine etwa äquidistante Anordnung der Reflexionsnullstellen ein verbessertes Laufzeitverhalten, da eine solche Verteilung eine etwa äquidistante Verteilung der Nullstellen von $E(s)$ bewirkt.

Im folgenden sei die Methode der Parameterbestimmung nach diesen Gesichtspunkten am Sonderfall $n = 4$, $m = 2$ dargestellt und durch ein praktisches Beispiel demonstriert. Zunächst bildet man aus den vorgeschriebenen und den gesuchten, in die z-Ebene transformierten Reflexionsnullstellen die Teilpolynome:

$(Z - Z_{01})(Z - Z_{02}) = (Z^2 + c_1' Z + c_0')$: Polynom der vorgeschr. Nullstellen

$(Z - Z_{03})(Z - Z_{04}) = (Z^2 + c_1'' Z + c_0'')$: Polynom der gesuchten Nullstellen

Es gilt daher nach Gl.(C-31) und (C-32):

$$\begin{aligned} & Z^4 + \underbrace{(c_1' + c_1'')}_{c_3} Z^3 + \underbrace{(c_0' + c_1' c_1'' + c_0'')}_{c_2} Z^2 + \underbrace{(c_0' c_1'' + c_1' c_0'')}_{c_1} Z + \underbrace{(c_0' c_1'' + c_1' c_0'')}_{c_0} \\ & = Z^4 + c_3 Z^3 + c_2 Z^2 + c_1 Z + c_0 \end{aligned} \qquad (C-37)$$

In analoger Weise bildet man für die Paramter der vorgeschriebenen und der gesuchten Dämpfungspole die Teilpolynome :

$(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) = (\mu^2 + M_1' \mu + M_0')$: Polynom der vorgschrieb. Parameter

$(\mu - \mu_3)(\mu - \mu_4) = (\mu^2 + M_1'' u + M_0'')$: Polynom der gesuchten Parameter

Es gilt darnach Gleichung (C-34) :

$$\mu^4 + \underbrace{(M_1' + M_1'')}\mu^3 + \underbrace{(M_0' + M_1' M_1'' + M_0'')}\mu^2 + \underbrace{(M_0' M_1'' + M_1' M_0'')}\mu + \underbrace{M_0' M_0''} =$$
$$= \mu^4 \quad + M_3\mu^3 \quad + M_2\mu^2 \quad + M_1\mu \quad + M_0 \qquad (C-38)$$

Die Koeffizienten der rechten Teile von Gl.(C-37) und (C-38) sind wieder durch die Gleichungen (C-36) verknüpft :

$$\begin{aligned} M_3 &= -c_3 \\ M_2 &= -c_2 \\ M_1 &= +c_1 \\ M_0 &= +c_0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} M_1' + M_1'' &= -(c_1' + c_1'') \\ M_0' + M_1' M_1'' + M_0'' &= -(c_0' + c_1' c_1'' + c_0'') \\ M_0' M_1'' + M_1' M_0'' &= +(c_0' c_1'' + c_1' c_0'') \\ M_0' M_0'' &= + c_0' c_0'' \end{aligned} \qquad (C-39)$$

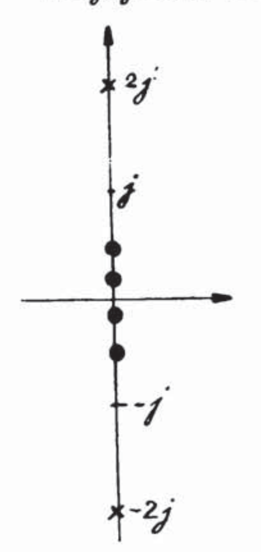
In diesen Gleichungn sind c_0' , c_1' , M_0' und M_1' bekannte Grössen, die man aus den vorgegebenen Polen und Nullstellen berechnet, und c_0'' , c_1'' , M_0'' und M_1'' gesuchte Grössen. Die Trennung bekannter und unbekannter Grössen ergibt das folgende lineare Gleichungssystem :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ M_1' & 1 & c_1' & 1 \\ -M_0' & -M_1' & c_0' & c_1' \\ 0 & -M_0' & 0 & c_0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1'' \\ M_0'' \\ c_1'' \\ c_0'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(M_1' + c_1') \\ -(M_0' + c_0') \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (C-40)$$

Die Lösungen sind die Koeffizienten der oben genannten Teilpolynome. Aus den Wurzeln dieser Polynome lassen sich die gesuchten Reflexionsnullstellen und Dämpfungspole berechnen.

Zahlenbeispiel :

Vorgegebene Pole und Nullstellen :



$s_{01} = +j\,0{,}175 \qquad Z_{01} = +0{,}177743$

$s_{02} = -j\,0{,}525 \qquad Z_{02} = -0{,}616847$

$s_{\infty 1} = j\,2{,}0 \qquad \mu_1 = m_1^{-1} = 1{,}1547$

$s_{\infty 2} = \infty \qquad \mu_2 = m_2^{-1} = 1{,}0$

Bemerkung : Auf Grund der Betrachtungen im Unterabschnitts C.2.2 muss man aufeinanderfolgenden Nullstellen abwechselndes Vorzeichen geben. Andere Vorzeichenwahlen sind zulässig, führen aber auf ungünstige Ergebnisse.

Mit den obigen Zahlenwerten errechnet man :

$$(Z^2 + c_1' Z + c_0') = Z^2 + 0{,}4391043\,Z - 0{,}109640$$

$$(\mu^2 + M_1' \mu + M_0') = \mu^2 - 2{,}1546988\,\mu + 1{,}154698$$

(C-40) :

$$\begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ -2{,}154698 & 1{,}0 & +0{,}439104 & 1{,}0 \\ -1{,}154698 & +2{,}154698 & -0{,}109640 & +0{,}439104 \\ 0{,}0 & -1{,}154698 & 0{,}0 & -0{,}109640 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1'' \\ M_0'' \\ c_1'' \\ c_0'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}715594 \\ -1{,}045058 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix}$$

Lösungen : $M_1'' = -1{,}749366$, $M_0'' = 0{,}667375$, $c_1'' = 3{,}471302$, $c_0'' = -7{,}006058$

Berechnung der gesuchten Dämpfungspole :

$$(\mu^2 + M''\mu + M'') = \mu^2 - 1{,}749367\,\mu + 0{,}667375$$

$$\mu_3 = 1{,}181246 \rightarrow m_3 = 0{,}842285 \rightarrow s_{\infty 3} = j\,1{,}85517$$

$$\mu_4 = 0{,}562119 \rightarrow m_4 = 1{,}77898 \rightarrow s_{\infty 4} = 0{,}67966$$

Berechnung der gesuchten Nullstellen :

$$(Z^2 + c_1'' Z + c_0'') = Z^2 + 3{,}471302\,Z - 7{,}00606$$

$$Z_{03} = 1{,}429557 \rightarrow s_{03} = j\,0{,}819418$$

$$Z_{04} = -4{,}900859 \rightarrow s_{04} = j\,0{,}979811$$

Mit den vorgeschriebenen und den berechneten Dämpfungspolen und einer Sperr-dämpfung von 64,9 dB lässt sich der Tiefpass berechnen, dessen Übertragungseigenschaften und Struktur der Schaltung in Abb.C.6a gezeigt sind. Die normierte Sperrgrenze ist 1,71, die Welligkeit 0,024 dB und Laufzeitverzerrungen $\leq$ 51 μsec. Aufwandsmässig kann man diesen Tiefpass mit einem laufzeitausgeglichenen Cauerparametertiefpass C 06 b, $\Theta = 37°$ vergleichen, von dem die Kombination mit einem Allpass ebenfalls 8.Grades ist. Das Übertragungsverhalten dieser Kombination ist in Abb.C.6b gezeigt. Die Welligkeit beträgt 0,1 dB und die Laufzeitverzerrungen $\leq$ 80 μsec.

Die in diesem Unterabschnitt beschriebene Methode der Pol- und Nullstellenbestimmung lässt sich leicht auf beliebiges n und m verallgemeinern. Die vorgeschriebenen und die berechneten Pole können als Anfangswerte eines Optimierverfahrens verwendet werden, wie es im nächsten Abschnitt beschrieben ist.

dB
Betriebsdämpfung
60
50
40
30
20
10
$A_{max} = 0,026$ dB
$A_{min} = 64,9$ dB
1,0 2,0 3,0 kHz

msec
Gruppenlaufzeit
1,1
1,0
$\Delta t_{max} = 57$ mikrosec.
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 kHz

<u>Struktur der Schaltung.</u> Von einer Reihe von Möglichkeiten seien die folgenden beiden Schaltungen angeführt :

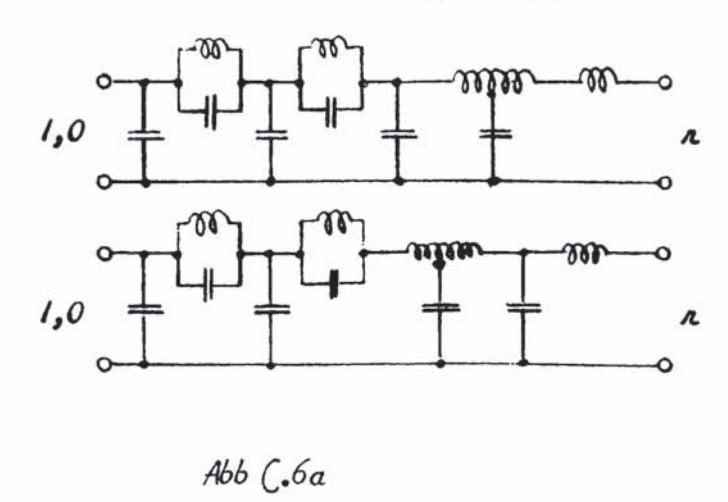


Abb C.6a

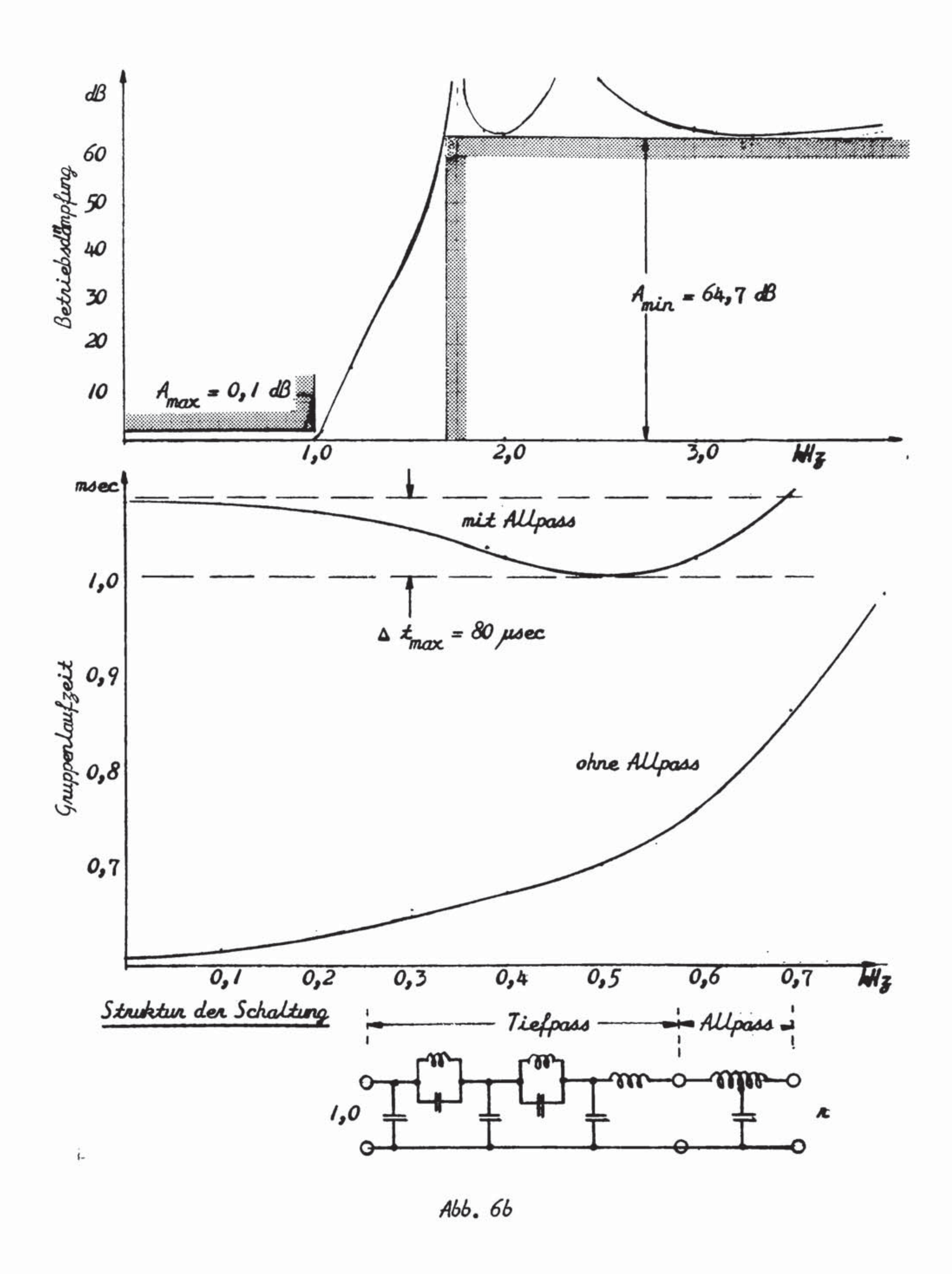

dB
60
50
40
30
20
10
Betriebsdämpfung
A_{max} = 0,1 dB
A_{min} = 64,7 dB
1,0
2,0
3,0
kHz
msec
mit Allpass
1,0
Δ t_{max} = 80 μsec
0,9
0,8
0,7
Gruppenlaufzeit
ohne Allpass
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
kHz
Struktur der Schaltung
Tiefpass
Allpass
1,0
r

Abb. 6b

C.3. Die Berücksichtigung von Phase und Laufzeit.

In steigendem Masse werden zu den Dämpfungsforderungen auch Anforderungen an die Phase und Laufzeit gestellt. In Reaktanzfiltern hängen Phase und Laufzeit nur vom Hurwitzpolynom $E(s)$ ab. Diese Polynom ist implizit bereits durch die Parameter der q-Funktionen und der Konstanten C mitbestimmt. Bei vorgegebenem C lassen sich die Parameter auch über die q-Funktionen aus einem vorgegebenen Hurwitzpolynom bestimmen. Wie bei Bennett([Be-1]) ergibt sich dabei die Forderung, dass man vom quadrierten Hurwitzpolynom auszugehen hat, was einer Verdoppelung des Grades und daher des Aufwands bedeutet. **Wesentlich günstiger scheint** das Optimierverfahren zu sein, das im folgenden Unterabschnitt vorgeschlagen wird und das durch das Einbeziehen der q-Funktionen rechnerische Vorteile verspricht.

C.3.1. Ein iteratives Verfahren für exakt gleichmässige Welligkeit der Dämpfung im Durchlassbereich und optimierten Laufzeit.

Der Vergleich der beiden Tiefpässe in den Abbildungen C.6a und b legt es nahe, Dämpfungs- und Laufzeitforderungen nicht wie üblich getrennt, sondern gleichzeitig zu berücksichtigen. Praktisch ist das derzeit nur mit einem iterativen Optimiertverfahren möglich. Verfahren dieser Art, die sowohl die Dämpfung als auch die Laufzeit iterativ im Tschebyscheffschem Sinn approximieren, wurden bereits veröffentlicht ([Wa-2]). Diesen Verfahren soll nun ein anderes gegenübergestellt werden, das die gleichmässige Welligkeit im Durchlassbereich ohne Iteration immer streng erfüllt, während die Laufzeit iterativ durch ein beliebiges Verfahren approximiert wird. Es ist praktisch von Vorteil, als Kriterium der Optimierung die Methode der kleinsten Quadrate zu verwenden. Abb. C.7 zeigt das Flussdiagramm der Methode. Darin bedeuten :

$s_1, s_2, \dots s_n$ einen Satz vorgegebener Dämpfungspole. Von diesen werden
$s_1, s_2 .. s_m$ zunächst im Sperrbereich so verteilt, dass gegebene Dämpfungsforderungen erfüllt werden. Sie bleiben dann für das Optimierverfahren fix. Die übrigen Dämpfungspole :

$s_{m+1}, s_{m+2}, \dots s_n$ liegen auf der reellen Achse oder im Komplexen in der Nähe des Durchlassbereiches. Ihre Lage ist innerhalb vernünftiger Grenzen unkritisch. Sie sind der Gegenstand des Optimierverfahrens.

Im Flussdiagramm entsprechen die Schritte " 0 " bis " 60 " mit einer Abweichung dem Flussdiagramm auf Seite 37. Diese Abweichung ist der Schritt " 45 ", in der die Polynome A_i, B_i, C_i und D_i, die den fixen Polen zugeordnet sind, gespeichert werden. Im Schritt "60" kann man die Konstante C so bestimmen, dass bei einer vorgegebenen Frequenz im Sperrbereich immer dieselbe Dämpfung erzielt wird. Für feste Welligkeit bleibt C konstant.
Im Schritt "70" werden die Eigenfrequenzen berechnet und gespeichert. Von der zweiten Iteration an sollen diese Frequenzen immer als Anfangswerte für die Wurzelberechung verwendet werden, die immer iterativ ausgeführt werden muss. Dadurch wird das Bestimmen der Wurzeln wesentlich verkürzt. Aus den jeweils gefundenen Eigenfrequenzen kann nun die Laufzeit für diskrete Frequenzen entsprechend den Anforderungen berechnet und gespeichert werden.
Das eigentliche Optimierverfahren besteht nun darin, die gesammte Berechnung der Schritte "10" bis "90" zu wiederholen, wobei jedesmal eine und nur eine der Polkoordinaten s_j $(j = m+1, m+2, \dots n)$ um den Betrag Δs_j verschoben wird. Dies geschieht im Schritt "110 ". Durch Vergleich der geänderten Laufzeitwerte mit den gespeicherten ergibt sich für jede Frequenz und jeden Parameter eine Grösse $\Delta\tau$. Die Quotienten $\Delta\tau / \Delta s_j$ bilden die Matrix der partiellen Differentialquotienten, aus denen sich verbesserte Lagen für die freien Dämpfungspole ableiten lassen. Dafür gibt es eine Reihe von Methoden. Entweder durch die Verwendung von Gewichten oder die dichtere Häufung der Auswertfrequenzen in bestimmten Frequenzbereichen lassen sich Laufzeitschemata verschiedenster Art optimieren.
Der Vorteil des vorgeschlagenen Verfahrens liegt darin, dass es nicht notwendig ist, die Reflexionsnullstellen als freie Parameter einzuführen und zu opti-

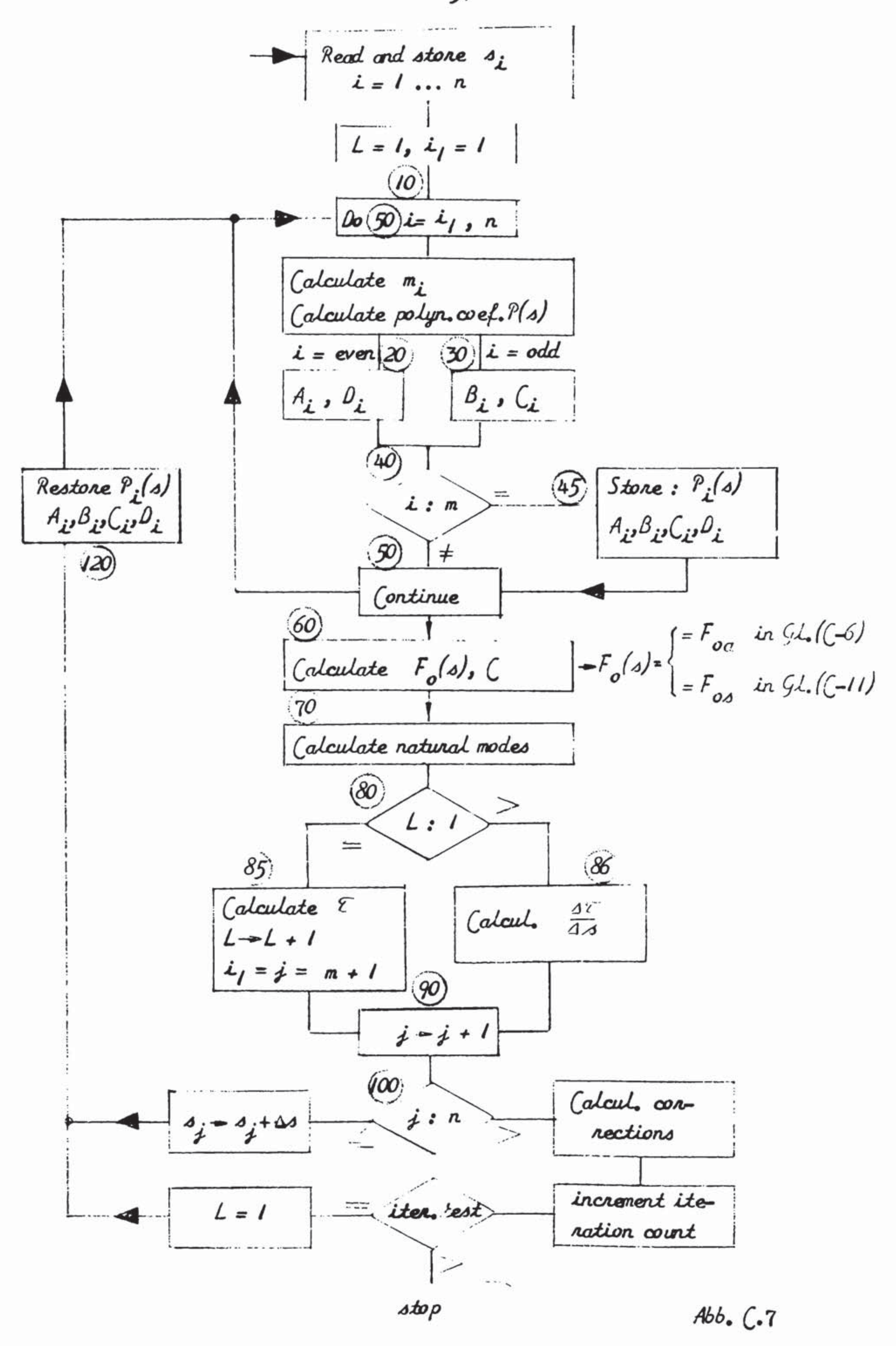

Read and store s_i
$i = 1 \ldots n$
$L = 1,\ i_1 = 1$
10
Do 50 $i = i_1,\ n$
Calculate m_i
Calculate polyn. coef. $P(s)$
i = even
20
30
i = odd
$A_i,\ D_i$
$B_i,\ C_i$
40
$i : m$
=
45
Store : $P_i(s)$
A_i, B_i, C_i, D_i
Restore $P_i(s)$
A_i, B_i, C_i, D_i
120
50
≠
Continue
60
Calculate $F_o(s),\ C$
$F_o(s) = \begin{cases} = F_{oa} & \text{in Gl. (C-6)} \\ = F_{os} & \text{in Gl. (C-11)} \end{cases}$
70
Calculate natural modes
80
$L : 1$
>
=
85
86
Calculate ε
$L \rightarrow L + 1$
$i_1 = j = m + 1$
Calcul. $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$
90
$j \rightarrow j + 1$
100
$j : n$
$s_j \rightarrow s_j + \Delta s$
<
>
Calcul. corrections
$L = 1$
=
iter. test
increment iteration count
>
stop

Abb. C.7

mieren. Da man in jedem Optimierverfahren etwa 10 Parameter für jeden zu optimierenden Parameter einführen soll, wird der Rechenaufwand und damit die Rechenzeit wesentlich reduziert. Der zusätzliche Aufwand an Rechenzeit, nämlich die iterative Berechnung von $F_o(s)$, C und der Eigenfrequenzen dürfte tragbar sein. Erstens ist ein Teil dieser Berechnungen durch die Speicherung von fixen Teilergebnissen [die Polynome A_i bis D_i und das Nennerpolynom der fixen Polfrequenzen $P_i(s)$] schon vorweggenommen. Zweitens beginnt die iterative Berechnung der Eigenfrequenzen mit sehr guten, sich ständig verbessernden Näherungswerten.

Wie bei allen Optimierverfahren ist es von Vorteil, durch eine geeignete Strategie dafür zu sorgen, dass die Optimierung nicht davonläuft. Am Schluss der Optimierung muss natürlich noch nachgeprüft werden, ob der Dämpfungsverlauf noch die Forderungen erfüllt. In ungünstigen Fällen kann eine Adjustierung der Dämpfungspole s_i ($i = 1, 2, \ldots m$) und eine Wiederholung des Verfahrens notwendig sein.

<u>Liste der verwendeten Symbole im Flussdiagramm der Abb. C.7</u>

i = Index der Laufschleife DO ... (50)

i_1 = unterer Grenzwert dieses Index. $i_1 = 1$ am Beginn

$i_1 = m$ bei der Optimierung.

L = Hilfparameter, der das Rechenprogramm im Schritt " 80 " steuert.

($L : 1$ bedeutet " L verglichen mit 1 ")

j = Index der Dämpfungspole, die optimiert werden sollen.

D. Übertragungsnetzwerke mit mehr als einem Durchlassbereich.

In diesem Abschnitt sollen Filter behandelt werden, die mehr als einen Durchlassbereich besitzen. Es sind dies diejenigen Filter, die im Unterabschnitt C.1 als " TP / BP ", " BP / BP " etc. bezeichnet wurden. Es ist möglich, sich auf die Behandlung von " BP / BP " Filtern zu beschränken. Der Fall " TP / BP " ist ein Sonderfall, bei dem die unterste Bandgrenze nach 0 rückt. Kompliziertere Fälle mit mehr als zwei Durchlassbereichen sind praktisch ohne Bedeutung. Ausserdem wird der Formelapparat für solche Filter sehr unhandlich, ohne theoretisch etwas Neues zu bieten.

Filter mit zwei Durchlassbereichen sind von einiger praktischer Bedeutung. Es wurde schon bei der Behandlung von Bandsperren im Unterabschnitt B.2 darauf hingewiesen, dass der Entwurf von Bandsperren mittels q-Funktionen zum Verlust von Reflexionsnullstellen auf der reelle Achse führen kann. Solch ein Verlust tritt natürlich nicht auf, wenn man die Bandsperre von einem geeigneten Bezugstiefpass herleitet. Dann allerdings wird das Dämpfungsverhalten frequenz-symmetrisch und kann mehr Dämpfungspole erfordern als notwendig ist. Ferner erstreckt sich der Durchlassbereich auf der einen Seite bis 0, auf der anderen bis ∞, also meistens in Bereiche, die für die Übertragungseigenschaften uninteressant sind. Ein weiterer grosser Nachteil ist auch das Fehlen von Dämpfungspolen bei 0 und ∞, wodurch die Realisierungsmöglichkeiten wesentlich eingeschränkt sind. Das ist besonders dann nachteilig, wenn zur Realisierung Quarze benötigt werden. Ein praktisches Beispiel möge diese Nachteile etwas erläutern:

Es sei die Forderung gestellt, aus der Grundgruppe 60 - 108 kHz der CCIT Norm ein bestimmtes Frequenzband, z.B. einen Kanal zu sperren. Das Toleranzschema ist in Abb. D.1. gezeigt. Es kann annähernd als frequenz-symmetrisch aufgefasst werden.

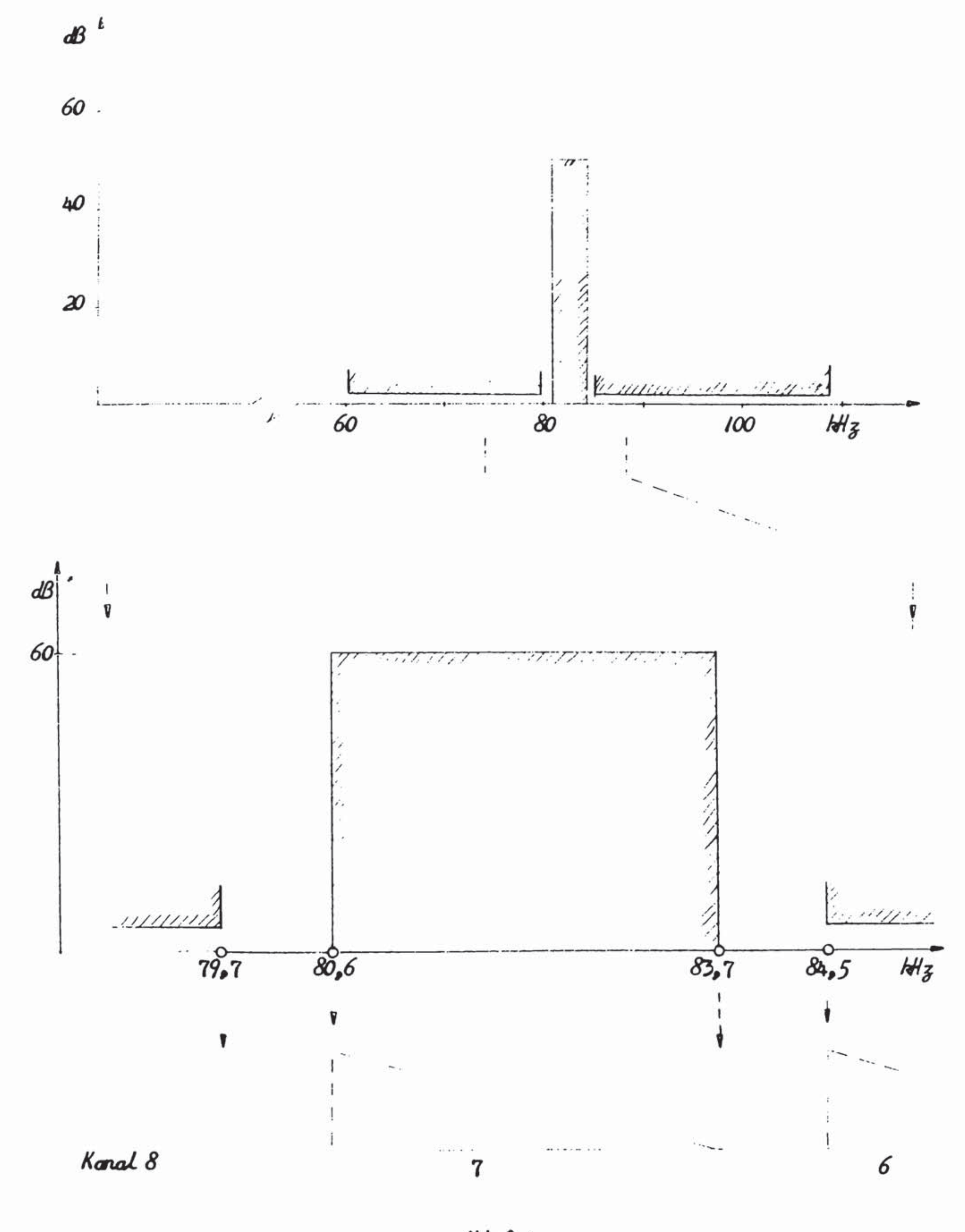


Abb.D.1.

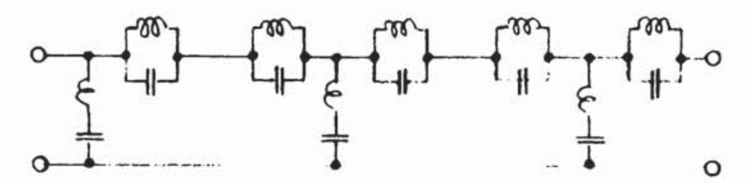
Der Bezugstiefpass :

Durchlassbereich : $\rho = 5\,\%$ d.h. $A_{max} = 0{,}011$ dB

Sperrbereich : $A_{min} = 50$ dB

normierte Sperrgrenze : $\Omega_s = \frac{\Delta f_s}{\Delta f_p} = \frac{84{,}5 - 79{,}7}{83{,}7 - 80{,}6} = 1{,}58$

Dieses Toleranzschema erfordert einen Bezugstiefpass C 06 05 40 b , mit dem die Forderungen ohne jede Toleranz eingehalten werden können. Aus dem Bezugstiefpass lässt sich mit der üblichen Bandpserrentransformation die folgende Schaltung oder ihr duales Gegenstück ableiten :



Sie erfordert 8 Spulen. Der Zusatz von Quarzen durch Netzwerkstransformationen ist denkbar, doch wird die erhaltene Schaltung nicht sehr stabil sein. Man wird daher gezwungen sein, zur Unterstützung zumindest der steilsten Pole zusätzliche Quarzbandsperren zu verwenden. Das erfordert pro Dämpfungspol 2 Spulen und einen Quarz, also insgesamt 4 zusätzliche Spulen und 2 Quarze.

Eine günstigere Schaltung und ein geringerer Aufwand ergibt sich, wenn diese Sperre als Bandpass mit zwei Durchlassbereichen entworfen wird. Darauf wird am Ende dieses Abschnitts zurückgekommen.

D.1. Die elementaren q-Funktionen.

Auf Grund der Betrachtungen in Unterabschnitt B.3 sind die folgenden Funktionen als q-Funktionen mit zwei Durchlassbereichen geeignet :

1\. Art : $$q_{I,i} = m_i \sqrt{\frac{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)}{(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)}} = m_i \frac{n_{13}(s^2)}{d_{24}(s^2)} \qquad (D-1)$$

2\. Art : $$q_{II,i} = m_i \sqrt{\frac{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}{(s^2+\omega_3^2)(s^2+\omega_4^2)}} = m_i \frac{n_{12}(s^2)}{d_{34}(s^2)} \qquad (D-2)$$

3\. Art : $$q_{III,i} = m_i \sqrt{\frac{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_4^2)}{(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_3^2)}} = m_i \frac{n_{14}(s^2)}{d_{23}(s^2)} \qquad (D-3)$$

Von diesen sind nur die q-Funktionen 1. Art als Quotient zweier Reaktanzfunktionen darstellbar. Die beiden anderen sind verallgemeinerter Art. Obwohl noch fünf weitere Typen möglich sind, seien die Betrachtungen auf diese drei beschränkt, da sie ausreichen, die Mehrzahl praktischer Probleme zu lösen und da sie allein befähigt sind, Dämpfungspole sowohl bei 0 als auch bei ∞ zu erzeugen. Es sei im folgenden angenommen, dass die Durchlassgrenzen $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ sind und dass $\omega < \omega_1$ den unteren, $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$ den mittleren und $\omega_4 \leq \omega$ den oberen Sperrbereich darstellt.

Es gilt wie früher, dass die Lage des Dämpfungspoles durch die Wahl des Parameters " m_i " bestimmt ist. Neu ist, dass die Bestimmung des m_i's durch ein vorgegebenes Dämpfungspaar gleichzeitig auch die Lage eines anderen eindeutig mitbestimmt. Es sei z.B. s_{p1} eine vorgeschriebene Polstelle, d.h. :

$$q(s_{p1}) = 1 \qquad (D-4)$$

(D-1,2,3),(D-4) : $$m_i^2 \left. \frac{(s^2+\omega_a^2)(s^2+\omega_b^2)}{(s^2+\omega_c^2)(s^2+\omega_d^2)} \right|_{s^2 = s_{p1}^2} = 1 \qquad (D-5)$$

$$m_i^2 = \frac{s_{p1}^4 + (\omega_c^2 + \omega_d^2)\, s_{p1}^2 + \omega_c^2 \omega_d^2}{s_{p1}^4 + (\omega_a^2 + \omega_b^2)\, s_{p1}^2 + \omega_a^2 \omega_d^2} \qquad (D-6)$$

In diesen Gleichungen bedeuten a, b, c und d die indices der obigen Gleichungen (D-1,2,3) abhängig davon, welche q-Funktion gewählt wurde. Die Gleichung (D-6) bestimmt eindeutig ein m_i. Dieses m_i im Zusammenhang mit Gleichung (D-6) ergibt dann eine einfache Verknüpfung des zweiten Polpaares s_{p2}:

$$s^4 + \frac{m_i^2(\omega_a^2 + \omega_b^2) - (\omega_c^2 + \omega_d^2)}{(m_i^2 - 1)}\, s^2 + \frac{m_i^2 \omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_c^2 \omega_d^2}{(m_i^2 - 1)} = (s^2 + s_{p1}^2)(s^2 + s_{p2}^2)$$

Daher

$$s_{p1}^2\, s_{p2}^2 = \frac{m_i^2 \omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_c^2 \omega_d^2}{m_i^2 - 1} \qquad (D-7)$$

Aus der zur Gleichung (D-4) analogen Beziehung

$$q(s_{0v}) = \pm j \qquad (D-8)$$

für Reflexionsnullstellen lassen sich auch Schlüsse über deren zu erwartende Lage ziehen. Diese Schlüsse gelten zunächst allerdings nur für elementare q-Funktionen. Die Reflexionsnullstellen können sowohl in einem der beiden Durchlassbereiche, oder verteilt in beiden, oder in gar keinem liegen. Für die Verteilung der Nullstellen ist wieder das Phasenverhalten der q-Funktionen im Durchlassbereich verantwortlich, wie es bereits im Unterabschnitt C.2 behandelt wurde. Durch Zusammensetzung der Teilphasen ergibt sich wieder eine Gesamtphase, aus der die Verteilung der Reflexionsnullstellen hervorgeht.

Die Wahl zwischen den möglichen q-Funktionen hängt von praktischen Erwägungen ab. Man wird vor allem bestrebt sein, dass beide Polpaare einer q-Funktion eine zweckmässige Rolle für das Dämpfungsverhalten des Filters spielen. Das lässt sich durch eine geeignete Wahl der q-Funktionen weitgehend steuern. Um diese Wahl

zu erleichtern, werden die Eigenschaften der drei Arten kurz diskutiert. Zur Vereinfachung der Formeln wird der Index " i " bei den Parametern " m " weggelassen. An seine Stelle treten später die indices " 1 ", " 2 " oder " 3 ", die nur ein Grössenverhältnis der Parameter ausdrücken sollen. Es soll immer gelten :

$$m_1 < m_2 < m_3 \qquad (D-9)$$

D.1.1. Die elementaren q-Funktionen 1.Art.

$$q^2 = m^2 \frac{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)}{(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)} = \frac{m^2\, n_{13}^2(s^2)}{d_{24}^2(s^2)} \qquad (D-10)$$

$$m^2 = \left.\frac{(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)}\right|_{s^2=s_p^2} \qquad (D-11)$$

Abb.D.2 ist eine graphische Darstellung der Gleichung (D-11). Sie zeigt den Zusammenhang zwischen einem gewählten Pol und den sich ergbenden " m^2 ", und ausserdem auch die Verkopplung der beiden Dämpfungspolpaare.

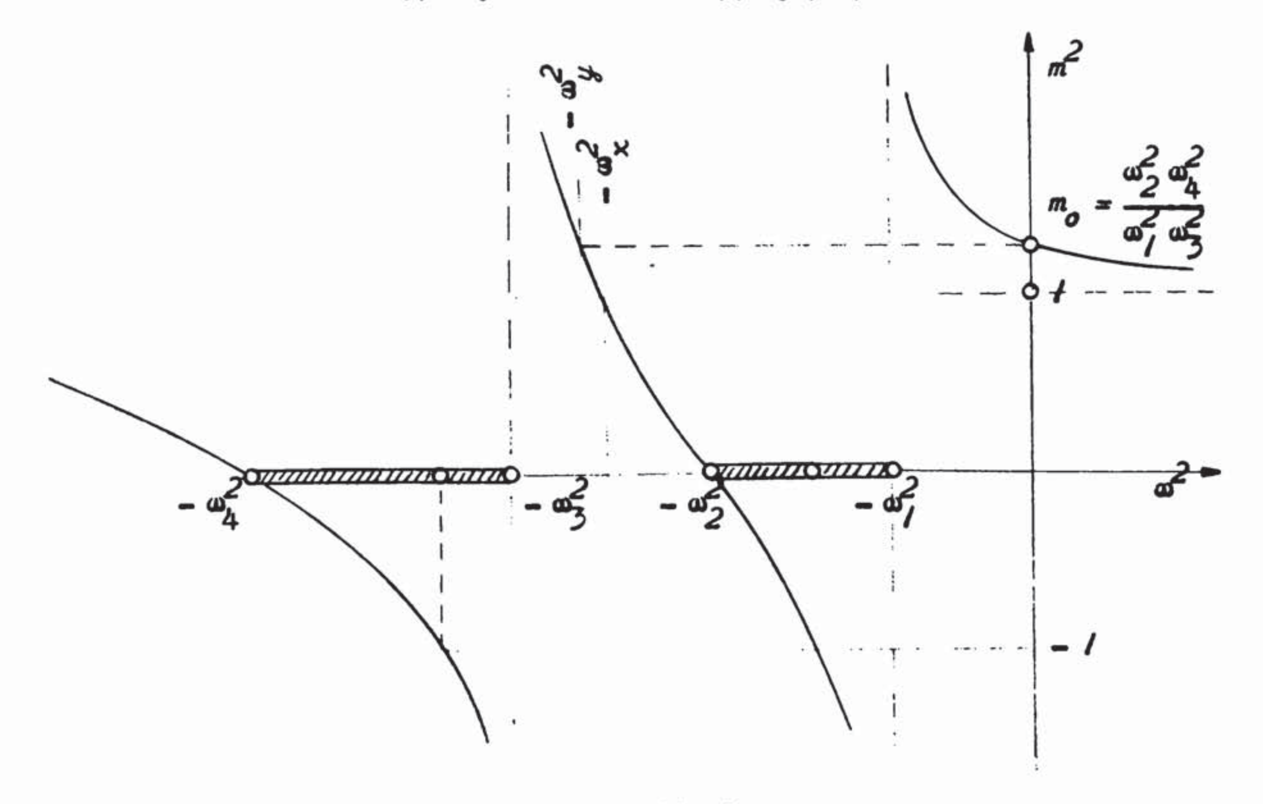


Abb. D.2

Zum Beispiel : $m = 1$ erzeugt je ein Polpaar bei der Frequenz $s = \pm j\,\omega_x$ und bei ∞ .

$m < 1$ erzeugt je ein Polpaar im Bereich $j\,\omega_2 \;\ldots\; j\,\omega_x$ und im Bereich $j\,\omega_4 \;\ldots\; \infty$

Die Wahl eines Pols im Bereich $j\,\omega_x \;\ldots\; j\,\omega_y$ bedingt ein Polpaar auf der reellen Achse.

etc.

Für die Reflexionsnullstellen gilt :

$$\text{(D-8),(D-11)} : \qquad -m^2 = \left. \frac{(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)} \right|_{s^2 = s_0^2} \qquad (D-12)$$

Verglichen mit Gleichung (D-11) bedeutet das eine Spiegelung der Kurve in Abb.D.2 um die horizontale Achse. Es ist einfacher, den entsprechenden m^2-Wert mit negativen Vorzeichen mit der Kurve in Abb.D.2 zum Schnitt zu bringen. Die beiden Schnittpunkte sind die Reflexionsnullstelle , wenn nur eine q-Funktion zum Bilden d charakteristischen Funktion verwendet würde. Es ist offensichtlich, dass sich immer je eine Nullstelle in den beiden Durchlassbereichen ergeben muss.

D.1.2. Elementare q-Funktionen 2.Art.

Die den Gleichungen (D-11) und (D-12) entsprechenden Ausdrücke können in einer Formel zusammengefasst werden, wenn man in der folgenden Gleichung das " + " den Dämpfungspolen und das " – " den Reflexionsnullstellen zuordnet :

$$\pm m^2 = \left. \frac{(s^2+\omega_3^2)(s^2+\omega_4^2)}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2} \right| \; s^2 = s_p^2 ,\; s_0^2 \qquad (D-13)$$

Die graphische Darstellung ist in Abb.D.3 zu sehen. Für genügend grosse oder genügend kleine m's rücken die beiden Polpaare immer näher an den einen oder den anderen Durchlassbereich heran. Gleichzeitig treten dann Reflexionsnullstellen im einen oder anderen Durchlassbereich auf. Es gibt aber auch einen Bereich für m, der Nullstellen weder im 1. noch im 2. Durchlassbereich erzeugt. Da sol-

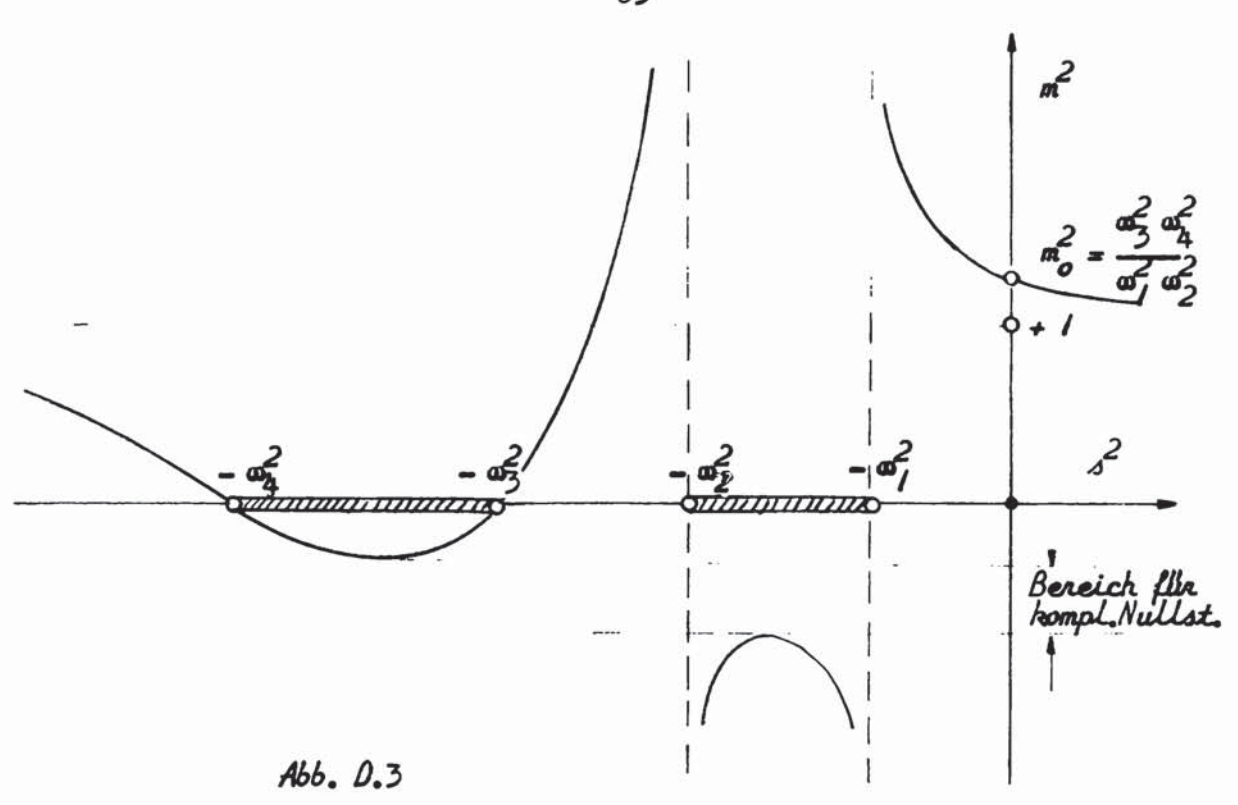


Abb. D.3

che Nullstellen natürlich meistens unerwünscht sind, wird man sich bei der Verwendung dieser q-Funktionen auf genügend kleine oder genügend grosse m-Werte beschränken.

D.1.3. Elementare q-Funktionen 3. Art.

$$q^2 = \frac{m^2\, n_{14}^2(s^2)}{d_{23}^2(s^2)} = \frac{m^2\,(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_4^2)}{(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_3^2)} \qquad (D-14)$$

Sonderfälle für die Lage der vorgeschriebenen Dämpfungspole :

$$s_p = \infty \qquad m = 1$$

$$s_p = 0 \qquad m = \frac{\omega_2\,\omega_3}{\omega_1\,\omega_4} = m_o$$

Beide Sonderfälle treten gleichzeitig auf, wenn $m_o = 1$ ist.

Für die qualitative Beschreibubg des allgemeinen Falles ist es zweckmässig, eine andere als die obige graphische Darstellung zu wählen. Es gilt offensichtlich für Polstellen ($q = 1$) :

$$m^2\, n_{14}^2(s^2) = d_{23}^2(s^2) \qquad (D-15)$$

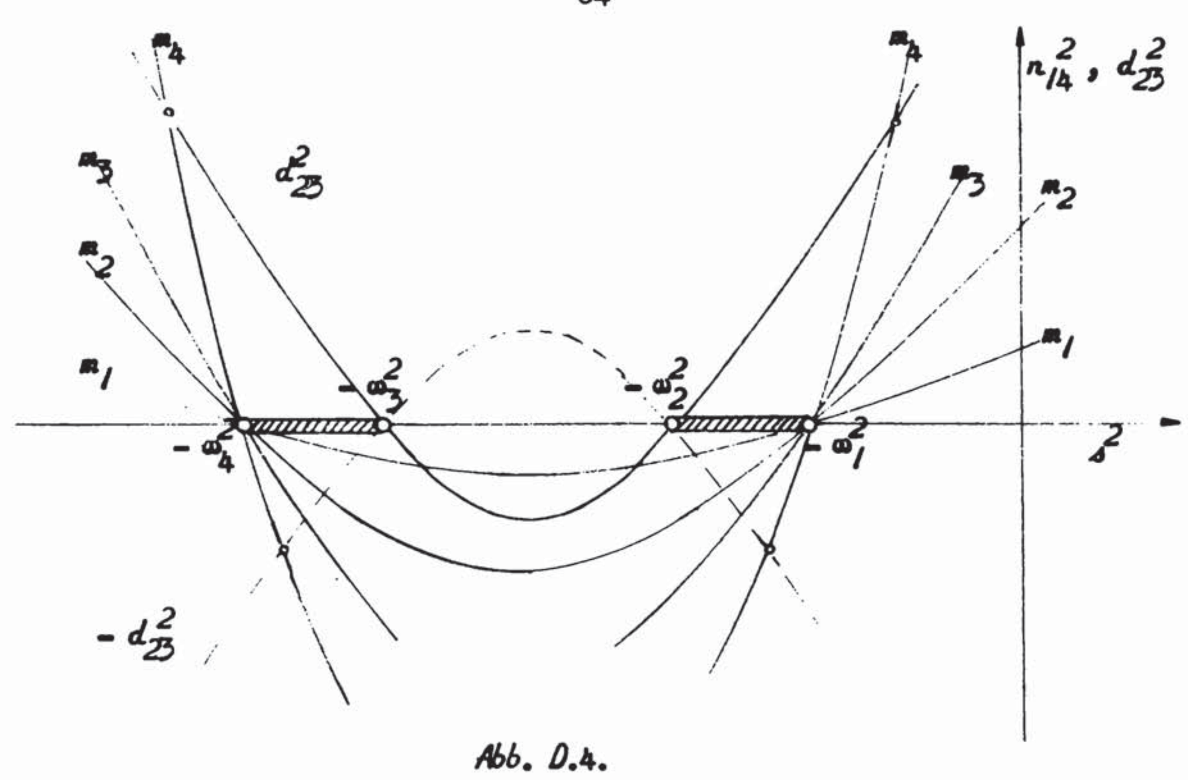


Abb. D.4.

Die Dämpfungspole sind also die Argumente der Schnittpunkte zweier Parabeln. (Abb.D.4.) Abhängig von Parameter " m " ergibt sich :

$m = m_1$	beide Dämpfungspolpaare zwischen den Durchlassbereichen.
$m = m_2$	kein Schnittpunkt der Parabeln, daher komplexes Polquadrupel.
$m = m_4$	ein Dämpfungspol im Sperrbereich 3, das andere im Sperrbereich 1 oder auf der reellen Achse.

Auf Grund dieser Eigenschaften ist diese q-Funktion besonders geeignet, Dämpfungspole entweder im mittleren Sperrbereich oder gleichzeitig im oberen und unteren Sperrbereich zu erzeugen.

An den Reflexionsnullstellen ist $q^2 = -1$. Für Gleichung (D-15) bedeutet das eine Spiegelung der Parabel $d^2_{23}(s^2)$ um die reelle Achse. Es wird immer ein Schnitt im oberen und unteren Durchlassbereich auftreten, d.h. diese Funktion wird immer Reflexionsnullstellen in beiden Bereichen beitragen.

D.2. Zusammengesetzte q-Funktionen.

Alle drei Arten von elementaren q-Funktionen lassen sich in beliebiger Weise zusammensetzen. Offensichtlich erfüllt jede von ihnen die allgemeine Bedingung :

$$q(s) = r(s)\,(s^2 + \omega_i^2)^{\pm\frac{1}{2}}\,, \quad r(j\omega_i) \neq 0\,, \text{ regulär} \qquad (D-16)$$

an jeden Verzeigungspunkt $j\,\omega_i$, d.h. an den 8 Punkten $\pm j\,\omega_1, \ldots \pm j\,\omega_4$.

Es sei nun angenommen, dass durch Zusammensetzung von n-q-Funktionen eine zusammengesetzte q-Funktion der Form :

$$q_n(s) = r_n(s)\,(s^2 + \omega_i^2)^{\delta_n}, \quad r_n(j\omega_i) \neq 0\,, \text{ regulär} \qquad (D-17)$$

gebildet wurde. Sie werde nun mit einer elementaren q-Funktion der Form :

$$q_1(s) = r_1(s)\,(s^2 + \omega_i^2)^{\delta_1}, \quad r_1(j\omega_i) \neq 0\,, \text{ regulär} \qquad (D-18)$$

zusammengesetzt. In den Gleichungen (D-17) und (D-18) haben die Exponenten δ_n und δ_1 den Wert $\pm\frac{1}{2}$. Mittels der Zusammensetzungsregel errechnet man :

$$q_{n+1}(s) = \frac{r_n(s)\, r_1(s)\, (s^2 + \omega_i^2)^{\delta_n + \delta_1} + 1}{r_n(s)\,(s^2 + \omega_i^2)^{\delta_n} + r_1(s)\,(s^2 + \omega_i^2)^{\delta_1}} \qquad (D-19)$$

Fasst man nun den Teil von $q_{n+1}(s)$, der den Verweigungspunkt bei ω_i nicht enthält, als Funktion $r_{n+1}(s)$ zusammen, so erhält man :

(a) bei gleichen Vorzeichen von δ_n und δ_1

$$q_{n+1}(s) = r_{n+1}(s)\,(s^2 + \omega_i^2)^{\delta_{n+1}}$$

wobei
$$r_{n+1}(s) = \frac{r_n(s)\, r_1(s)\, (s^2 + \omega_i^2)^{\delta_n + \delta_1} + 1}{r_n(s) + r_1(s)} \qquad (D-20)$$

und
$$|\delta_{n+1}| = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \operatorname{sgn} \delta_{n+1} = - \operatorname{sgn} \delta_n$$

(b) bei ungleichen Vorzeichen von δ_n und δ_1

$$q_{n+1}(s) = \frac{r_n(s)\, r_1(s)\, (s^2+\omega_i^2) \quad + \quad 1}{r_n(s)\,(s^2+\omega_i^2)^{\delta_n-\delta_1} \quad + r_1(s)}\,(s^2+\omega_i^2)^{-\delta_1}$$

$$q_{n+1}(s) = r_{n+1}(s)\,(s^2+\omega_i^2)^{-\delta_1} \qquad (D-21)$$

In beiden Fällen ist

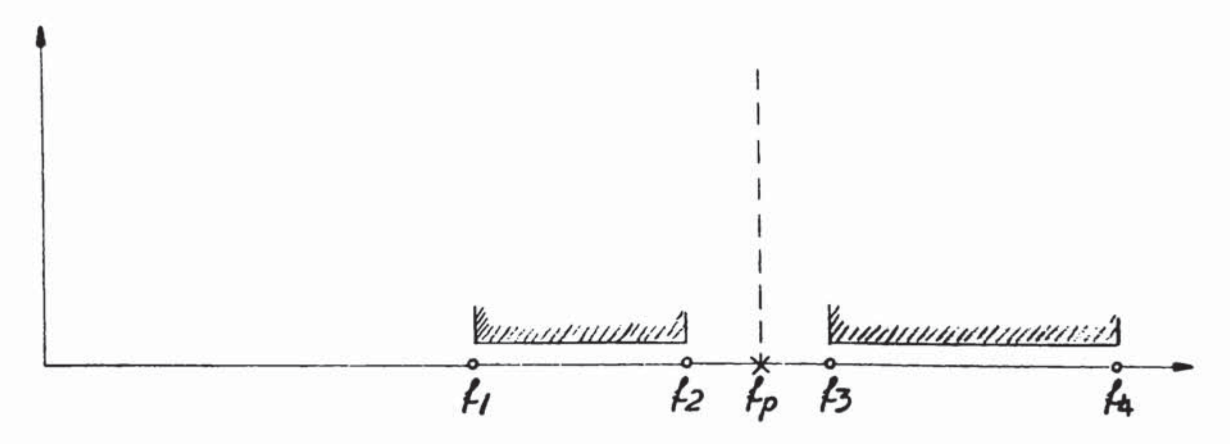
$$r_{n+1}(j\omega_i) \neq 0, \text{ regulär} \qquad (D-22)$$

also wieder eine zulässige q-Funktion. Durch Schluss von n auf n+1 ist damit die beliebige Zusammensetzung der q-Funktionen bewiesen.

D.2.1. Zusammensetzung gleichartiger q-Funktionen.

Die Zusammensetzung gleichartiger q-Funktionen erfolgt nach den Regeln des Unterabschnittes C.1, insbesonders nach den Formeln der Tabelle in Abb. C.1. Das folgende Zahlenbeispiel soll die Methode etwas eingehender demonstrieren.

Zahlenbeispiel.



Bandgrenzen: $f_1 = 60$ kHz, $f_2 = 90$ kHz, $f_3 = 110$ kHz, $f_4 = 150$ kHz

Vorgeschrieben: Zusammensetzung von 3 gleichartigen q-Funktionen 1. Art, die all einem Dämpfungspol bei $f_p = 100{,}666$ kHz zugeordnet sein sollen.

Gesucht: Die Polynome der charakteristischen Funktion.

Lösung :

Bezugsfrequenz : $f_{ref} = 100$ kHz

$$q_v = m_v \sqrt{\frac{(s^2 + 0{,}6^2)(s^2 + 1{,}1^2)}{(s^2 + 0{,}9^2)(s^2 + 1{,}5^2)}} \qquad v = 1, 2, 3$$

$f_{pv} = 100{,}666$ kHz $\qquad s_{pv} = j\,\omega_{pv} = j\,1{,}00666 \qquad v = 1, 2, 3$

(D-6) : $\qquad m_v = 1{,}3990736$

Bei dieser Wahl von m entsteht je ein zweites Polpaar auf der reellen s-Achse :

(D-7) : $\qquad s_{pv} = \sigma_{pv} = 0{,}999820 \qquad v = 4, 5, 6$

$$R_I^2 = (s^2 + 0{,}36)(s^2 + 1{,}21) = s^4 + 1{,}57\,s^2 + 0{,}435599$$

$$R_{II}^2 = (s^2 + 0{,}81)(s^2 + 2{,}25) = s^4 ++ 3{,}06\,s^2 + 1{,}8224964$$

$$R_I^2 R_{II}^2 = s^8 + 4{,}63\,s^6 + 7{,}06228351\,s^4 + 4{,}194246292\,s^2 + 0{,}79387166$$

Berechnung von P(s) aus den Wurzelfaktoren :

$$P(s) = \prod_{1}^{3} (s^2 + 1{,}00666^2)(s^2 - 0{,}999820^2)$$

Berechnung von F(s) nach den Gleichungen der Tabelle in Abb. C.1 :

$B_1 = 1{,}0 \qquad\qquad C_1 = 1{,}3990736$

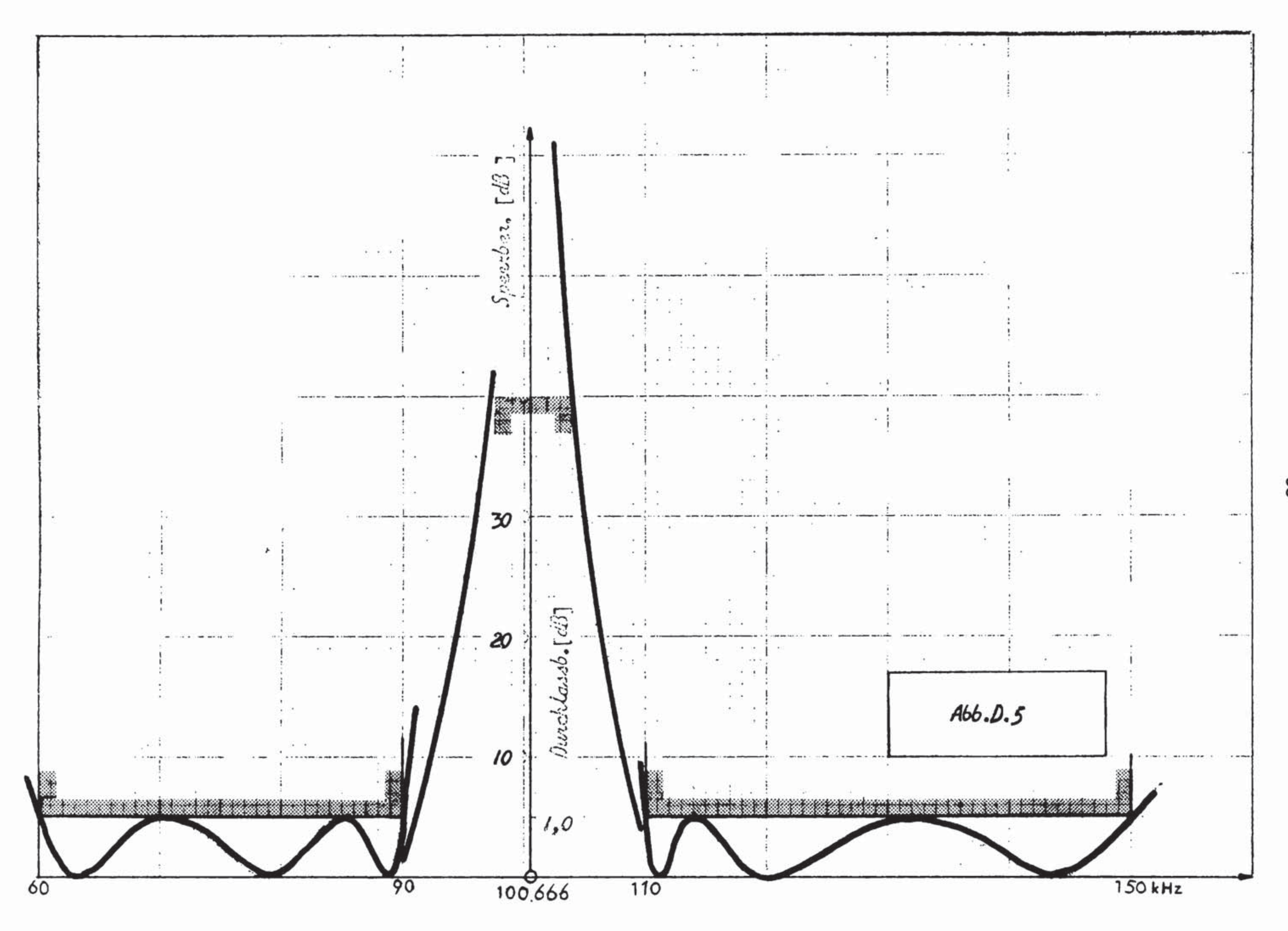
$A_2 = 2{,}6751409 + 6{,}1331217\,s^2 + 2{,}957407\,s^4 \qquad D_2 = 2{,}7981472$

$B_3 = 4{,}3804301 + 12{,}27937703\,s^2 + 6{,}87222082\,s^4$

$C_3 = 8{,}8423323 + 17{,}1430088\,s^2 + 6{,}93577718\,s^4$

(C-8) : $$F(s) = s^{12} + 6{,}572934309\,s^{10} + 17{,}038759808\,s^8 + 22{,}2538510565\,s^6 + 15{,}40408107\,s^4 + 5{,}345389949\,s^2 + 0{,}7240818650$$

Die Abb.D.5 zeigt die Auswertung der so gewonnenen charakteristischen Funktion für eine Welligkeit von 1,0 dB.


Sperrber. [dB]
Durchlassb. [dB]
30
20
10
1,0
60
90
100,666
110
150 kHz
Abb.D.5

D.2.2. Die Zusammensetzung ungleichartiger q-Funktionen.

Die Rekursionsformeln des Unterabschnitts C.1 gelten nur für die Zusammensetzung von gleichartigen q-Funktionen. Zur Zusammensetzung ungleichartiger q-Funktionen, z.B. solcher 1. Art mit denen 2. oder 3. Art, kann man folgenden Weg einschlagen : Man fasst zunächst n gleichartige q-Funktionen entsprechend den Formeln des Unterabschnitts C.1 zusammen und bildet eine fiktive charakteristische Funktion $K_{o,n}$.

((C-3) :

$$Q^{(n)} = \frac{T_{n,1} + T_{n,2}}{T_{n,1} - T_{n,2}} \qquad (D-23)$$

wobei $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ den Ausdrücken der Gleichung ((C-5) entsprechen. Die Hilfsfunktion $K_{o,n}(s)$ ist dann :

(B-16),((C-6) :

$$K_{o,n}(s) = \frac{T^2_{n,1} + T^2_{n,2}}{T^2_{n,1} - T^2_{n,2}} \qquad (D-24)$$

In ähnlicher Weise ergibt die Zusammensetzung von m anderen, unter sich ebenfalls gleichartigen q-Funktionen :

$$Q^{(m)} = \frac{T_{m,1} + T_{m,2}}{T_{m,1} - T_{m,2}} \qquad (D-25)$$

und

$$K_{o,m}(s) = \frac{T^2_{m,1} + T^2_{m,2}}{T^2_{m,1} - T^2_{m,2}} \qquad (D-26)$$

Nach der Zusammensetzungregel bildet man nun die q-Funktion, die sich aus den (n + m) elementaren Funktionen ergibt :

$$Q = Q^{(n)} . Q^{(m)} = \frac{T_{n,1} + T_{n,2}}{T_{n,1} - T_{n,2}} \; \frac{T_{m,1} + T_{m,2}}{T_{m,1} - T_{m,2}} \qquad (D-27)$$

$$Q = \frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2} \qquad (D-28)$$

mit

$$T_1 = T_{n,1}\, T_{m,1} + T_{n,2}\, T_{m,2}$$
$$T_2 = T_{n,1}\, T_{m,2} + T_{n,2}\, T_{m,1} \qquad (D-29)$$

Die gesuchte charakteristische Funktion ist dann

$$K_{o,n+m}(s) = \frac{F_{o,n+m}(s)}{\varphi_{o,n+m}(s)} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \qquad (D-30)$$

$$K_{o,n+m}(s) = \frac{(T_{n,1}^2 + T_{n,2}^2)(T_{m,1}^2 + T_{m,2}^2) + 4\, T_{n,1}\, T_{n,2}\, T_{m,1}\, T_{m,2}}{(T_{n,1}^2 - T_{n,2}^2)(T_{m,1}^2 - T_{m,2}^2)} \qquad (D-31)$$

Durch Vergleich von (D-24), (D-26) und (D-31) findet man :

$$K_{o,n+m}(s) = \frac{F_{o,n}(s)\, F_{o,m}(s) + \Delta F(s)}{\varphi_{o,n}(s)\, \varphi_{o,m}(s)} \qquad (D-32)$$

wobei $\Delta F(s)$ einem der folgenden vier Ausdrücke gleich ist :

$$\Delta F(s) \begin{cases} = 4\, A_n(s)\, D_n(s)\, A_m(s)\, D_m(s)\, R^2 & \text{wenn } n = \text{gerade}, \; m = \text{gerade} \\ = 4\, A_n(s)\, D_n(s)\, B_m(s)\, C_m(s)\, R^2 & \text{wenn } n = \text{gerade}, \; m = \text{ungerade} \\ = 4\, B_n(s)\, C_n(s)\, A_m(s)\, D_m(s)\, R^2 & \text{wenn } n = \text{ungerade}, \; m = \text{gerade} \\ = 4\, B_n(s)\, C_n(s)\, B_m(s)\, C_m(s)\, R^2 & \text{wenn } n = \text{ungerade}, \; m = \text{ungerade} \end{cases} \qquad (D-33)$$

$$\text{mit } R^2 = (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_4^2) \qquad (D-34)$$

Die Polynome $A_n(s)$ .... $D_n(s)$ und $A_m(s)$ .... $D_m(s)$ entsprechen denen in Abbildung C.1 und dienen zur Berechnung von $K_{o,n}(s)$ bzw. $K_{o,m}(s)$.

Will man schliesslich auch " k " elementare q-Funktionen der 3. Art zusetzen, so verfährt man ganz analog :

$$Q = Q^{(n)} Q^{(m)} Q^{(k)} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2} \; \frac{T_{k,1} + T_{k,2}}{T_{k,2} - T_{k,2}} \qquad (D-35)$$

$$Q = \frac{T_a + T_b}{T_a - T_b} \quad ; \quad K_{o,k} = \frac{T_a^2 + T_b^2}{T_a^2 - T_b^2} \qquad (D-36)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} T_a &= T_1 T_{k,1} + T_2 T_{k,2} \\ T_b &= T_1 T_{k,2} + T_2 T_{k,1} \end{aligned}\right\} \qquad (D-37)$$

Weiters wird

$$K_{o,n+m+k}(s) = \frac{F_{o,n+m+k}(s)}{P_{o,n+m+k}(s)} = \frac{T_a^2 + T_b^2}{T_a^2 - T_b^2} \qquad (D-38)$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke erhält man

$$K_{o,n+m+k}(s) = \frac{F_{o,n}(s)\, F_{o,m}(s)\, F_{o,k}(s) + \Delta F(s)}{P_{o,n}(s)\, P_{o,m}(s)\, P_{o,k}(s)} \qquad (D-39)$$

also wieder als Produkt der charakteristischen Hilfsfunktionen plus einem Korrekturglied im Zähler. Für diese Korrekturglied errechnet man :

$$\Delta F(s) = 4\, [\, T_{n,1} T_{n,2} T_{m,1} T_{m,2} F_{o,k}(s) + T_{n,1} T_{n,2} T_{k,1} T_{k,2} F_{o,m}(s)$$

$$+ T_{m,1} T_{m,2} T_{k,1} T_{k,2} F_{o,n}(s)\,] \qquad (D-40)$$

Abhängig davon, welche von den indices n , m und k gerade oder ungerade sind , ergeben sich ähnlich wie in Gleichung (D-33) acht verschiedene Möglichkeiten für $\Delta F(s)$.

D.2.3. Zahlenbeispiel für das Zusammensetzen ungleichartiger q-Funktionen.

Bandgrenzen : $f_1 = 60$ kHz , $f_2 = 90$ kHz , $f_3 = 110$ kHz , $f_4 = 150$ kHz

Vorgeschrieben : Zusammensetzung einer q-Funktion erster Art mit einer dritten Art.

Gesucht : Die Polynome der charakteristischen Funktion.

Lösung :

Bezugsfrequenz = 100 kHz

(a) Für die q-Funktion 1. Art sei vorgeschrieben (siehe Unterabschnitt D.2.1)

$f_{p1} = 100{,}666$ kHz $\qquad s_{p1} = j\,1{,}00666 \qquad m_1 = 1{,}3990731$

Der zugeordnete Pol liegt auf der reellen Achse :

(D-7) : $\qquad s_{p2} = 0{,}99982$

$R_I^2 = s^4 + 1{,}5700000\, s^2 + 0{,}4356000$

$R_{II}^2 = s^4 + 3{,}0624907\, s^2 + 1{,}8245175$

$R_I^2\, R_{II}^2 = s^8 + 4{,}6324907\, s^6 + 7{,}0682278\, s^4 + 4{,}1985134\, s^2 + 0{,}7947598$

$$(D\text{-}24) : \quad K_{o,n}(s) = \frac{2{,}9614144\, s^4 + 6{,}1419114\, s^2 + 2{,}6789096}{(s^2 + 1{,}00666^{\,2})(s^2 - 0{,}999820^{\,2})}$$

(b) Für die q-Funktion 3. Art sei vorgeschrieben :

$f_{p3} = 94{,}0$ kHz $\qquad s_{p3} = j\,0{,}94 \qquad m_3 = 0{,}1830752$

Der zugeordnete Pol liegt ebenfalls im mittleren Sperrbereich

(D-7) : $\qquad s_{p4} = j\,1{,}05634 \qquad f_{p4} = 105{,}634$ kHz

$R_I^2 = s^4 + 2{,}6124907\, s^2 + 0{,}8108966$

$R_{II}^2 = s^4 + 2{,}0200000\, s^2 + 0{,}980100$

$R_I^2\, R_{II}^2$ identisch wie unter (a)

$$(D\text{-}26) : \quad K_{o,m}(s) = \frac{1{,}0335165\, s^4 + 2{,}1075617\, s^2 + 1{,}0072785}{(s^2 + 0{,}94^{\,2})(s^2 + 1{,}05634^{\,2})}$$

(c) Zusammensetzung beider Funktionen.

$$F_{o,n}(s)\,F_{o,m}(s) = 3{,}0606708\,s^8 + 12{,}5891306\,s^6 + 18{,}6961233\,s^4 + 11{,}8325821\,s^2 + 2{,}6984079$$

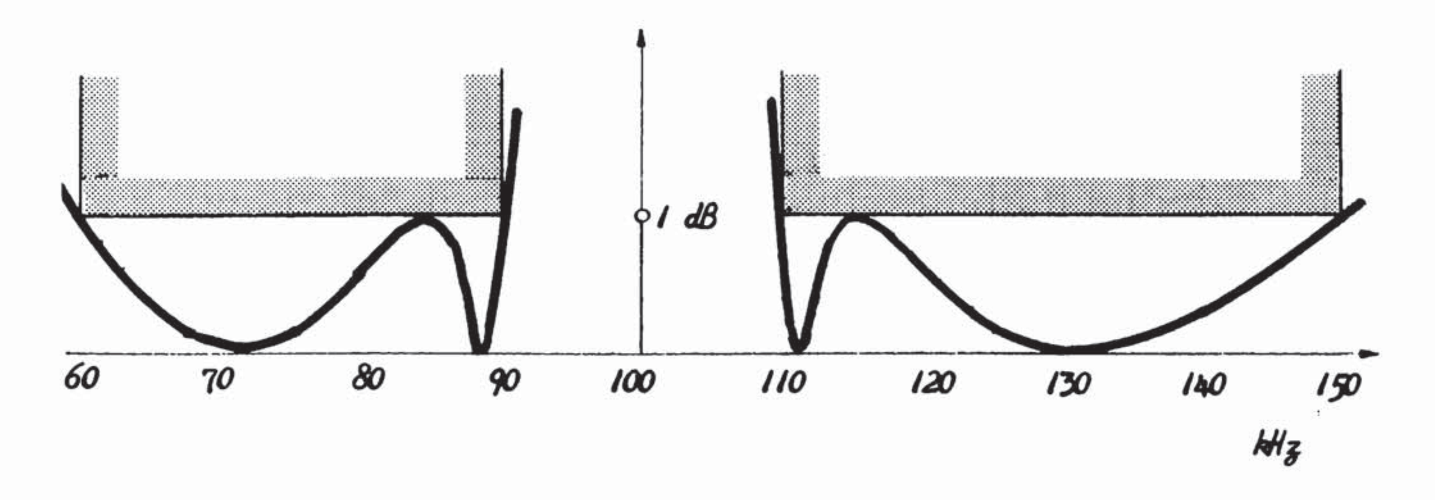
$$(D\text{-}33):\ \Delta F(s) = 1{,}0255912\,s^8 + 4{,}7510420\,s^6 + 7{,}2491128\,s^4 + 4{,}3059584\,s^2 + 0{,}8150988$$

Das Zähler- und das Nennerpolynom der gesuchten charakteristischen Funktion ist dann in normierter Form :

$$F_{o,n+m}(s) = s^8 + 4{,}2435292\,s^6 + 6{,}3493813\,s^4 + 3{,}9494630\,s^2 + 0{,}8598339$$

$$P_{o,n+m}(s) = s^8 + 2{,}0170630\,s^6 + 0{,}0121181\,s^4 - 2{,}0002053\,s^2 - 0{,}9949007$$

Auswertung der Betriebsdämpfung über den Bereich 60 – 90 kHz und 110 – 150 kHz ($C_k = 2{,}2377386$)

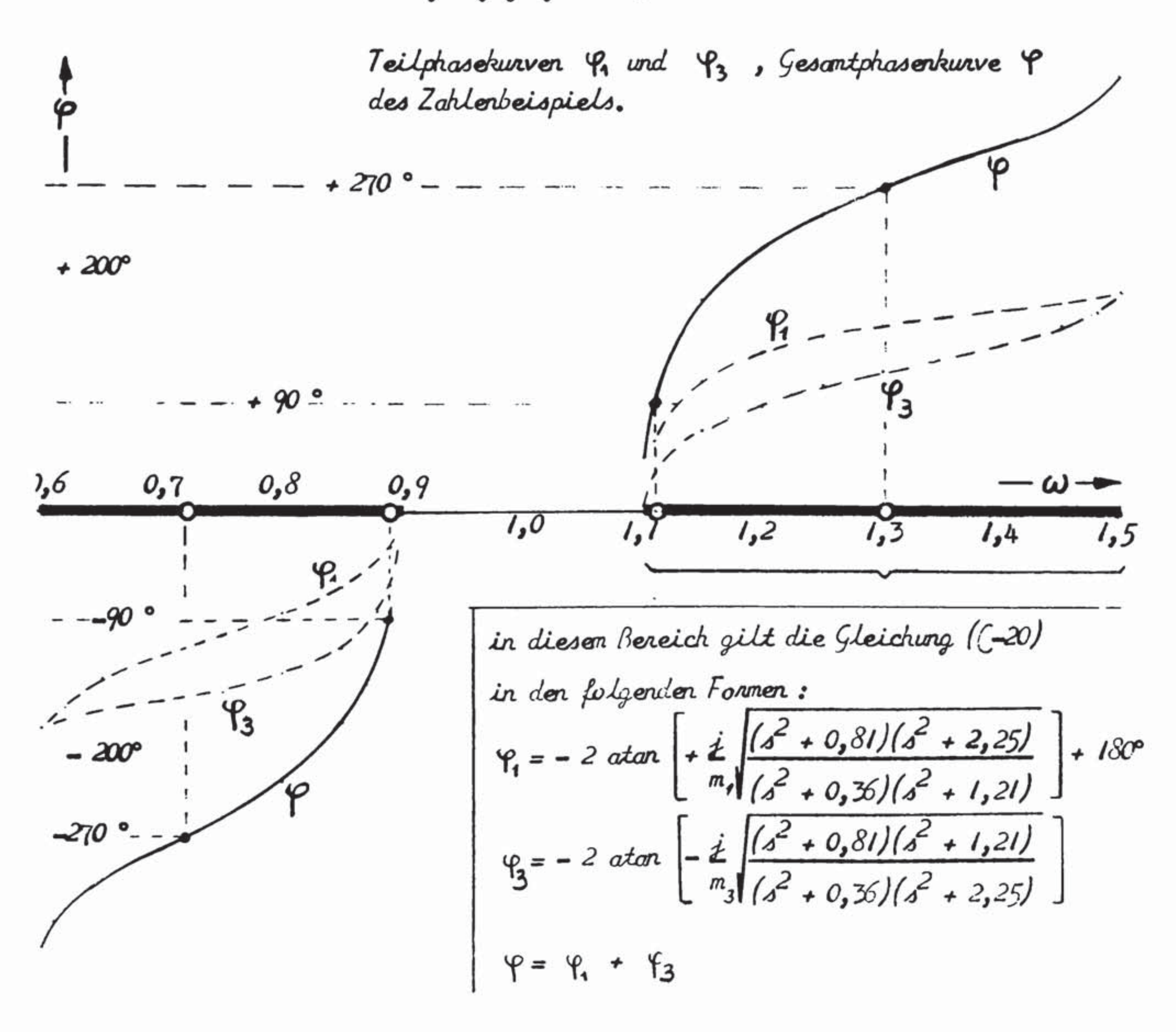


Für die Lage der Reflexionsnullstellen gelten die Phasenüberlegungen des Unterabschnitts C.2. Es sei darauf hingewiesen werden, dass die Teilphasen φ_i der Gleichung ((C-20) aus zwei Gründen mehrdeutig werden können. Erstens durch den willkürlichen und belanglosen Zusatz von $k\pi$; zweitens durch das Vorzeichen der Wurzel in q_i. Ausschlaggebend beim Zusammensetzen der Teilphasenkurven ist das relative Vorzeichen der verschiedenen q-Funktionen zueinander. Schreibt man z.B.

im obigen Zahlenbeispiel :

$$q_I = m_1 \frac{(s^2+0{,}81)(s^2+2{,}25)}{(s^2+0{,}36)(s^2+1{,}21)} \qquad q_{III} = m_3 \frac{(s^2+0{,}81)(s^2+1{,}21)}{(s^2+0{,}36)(s^2+2{,}25)} \quad \Bigg\} \quad q_{III} = \frac{m_3}{m_1}\,\frac{(s^2+2{,}25)}{(s^2+1{,}21)}\, q_I$$

dann bestimmt der Faktor $(s^2 + 2{,}25)/(s^2 + 1{,}21)$ das relative Vorzeichen in den beiden Durchlassberei chen. Im unteren Durchlassbereich ist er positiv, im oberen negativ. Für die Teilphasen und die Gesamtphase gelten daher die Formeln, wie sie in der unten stehenden Figur gezeigt sind.



$$\varphi_1 = -2 \operatorname{atan}\left[+\frac{j}{m_1}\sqrt{\frac{(s^2+0{,}81)(s^2+2{,}25)}{(s^2+0{,}36)(s^2+1{,}21)}}\right] + 180^\circ$$

$$\varphi_3 = -2 \operatorname{atan}\left[-\frac{j}{m_3}\sqrt{\frac{(s^2+0{,}81)(s^2+1{,}21)}{(s^2+0{,}36)(s^2+2{,}25)}}\right]$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_3$$

D.3. Elementare und zusammengesetzte q'-Funktionen.

D.3.1. Elementare q'-Funktionen.

Sind ω_1, ω_2, ω_3 und ω_4 die Verzweigungspunkte einer elementaren q-Funktion nach Gleichung (D-1) bis (D-3), dann ist es auf Grund der Überlegungen in Unterabschnitt B.3 sofort möglich, eine der möglichen elementaren q'-Funktionen anzuschreiben, z.B. :

$$q_0'(s) = \sqrt{\frac{(s + j\omega_1)(s + j\omega_2)(s + j\omega_3)(s + j\omega_4)}{(s - j\omega_1)(s - j\omega_2)(s - j\omega_3)(s - j\omega_4)}} = \frac{W_1(s)}{W_2(s)} \qquad (D-41)$$

Offensichtlich erfüllt diese Funktion alle Bedingungen, durch die q'-Funktionen definiert sind. Diese Bedingungen sind aber auch dann erfüllt, wenn man die ω_i beliebig mit positiven oder negativen Vorzeichen versieht, was einer paarweisen Vertauschung von Polen und Nullstellen entspricht. Durch diesen Prozess ist es möglich, acht verschiedene Vorzeichenverteilungen und damit acht verschiedene elementare q'-Funktionen zu erzeugen (die dazu reziproken nicht mitgezählt). Diese sollen in folgender Weise bezeichnet werden :

	Vorzeichen von ω_i			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$q_{0,1}'$	+	+	+	+
$q_{0,2}'$	+	+	+	-
$q_{0,3}'$	+	+	-	+
$q_{0,4}'$	+	+	-	-
$q_{0,5}'$	+	-	+	+
$q_{0,6}'$	+	-	+	-
$q_{0,7}'$	+	-	-	+
$q_{0,8}'$	+	-	-	-

Unabhängig von der Wahl der Vorzeichen gilt :

$$W_1^2(s) = s^4 + j\,(\sum \omega_i)\, s^3 - (\sum \omega_i \omega_j)\, s^2 - j\,(\sum \omega_i \omega_j \omega_k)\, s + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$$

$$\left.\begin{aligned} W_1^2(s) &= s^4 + j w_3 s^3 + w_2 s^2 + j w_1 s + w_0 \\ W_2{}^2(s) &= s^4 - j w_3 s^3 + w_2 s^2 - j w_1 s + w_0 \end{aligned}\right\} \quad (D-42)$$

mit

$$w_3 = +(\sum \omega_i) \qquad w_2 = -(\sum \omega_i \omega_j) \qquad (D-43)$$

$$w_1 = -(\sum \omega_i \omega_j \omega_k) \; ; \quad w_0 = +\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$$

Jede Wahl der Vorzeichen bestimmt eindeutig die vier Koeffizienten w_i. Damit lässt sich die Hilfsfunktion $K_0'(s)$ berechnen :

(D-41) :
$$Q_0' = \frac{q_0' + 1}{q_0' - 1} = \frac{W_1(s) + W_2(s)}{W_1(s) - W_2(s)} \qquad (D-44)$$

$$K_0'(s) = \frac{F_0'(s)}{P_0'(s)} = j\,\frac{W_1^2(s) + W_2{}^2(s)}{W_1^2(s) - W_2{}^2(s)} \qquad (D-45)$$

$$K_0'(s) = \frac{s^4 + w_2 s^2 + w_0}{s\,(w_3 s^2 + w_1)} \qquad (D-46)$$

Offensichtlich erzeugt jede elementare q'-Funktion :

(a) 4 Nullstellen des Reflexionsfaktors

(b) je einen einfachen Pol bei 0 und ∞

(c) ein weiteres Polpaar, dessen Lage durch w_3 und w_1 bestimmt ist.

$w_3 = 0$ Polpaar bei ∞ , d.h. 3-facher Pol bei ∞

$w_1 = 0$ Polpaar bei 0 , d.h. 3-facher Pol bei 0

$w_3 \neq 0$, $w_1 \neq 0$ Polpaar bei einer endlichen Frequenz

Diese Pole werden beim Zusammensetzen auf die Gesamt-q-Funktion übertragen und bewirken dann Dämpfungspole in der endgültigen charakteristischen Funktion.

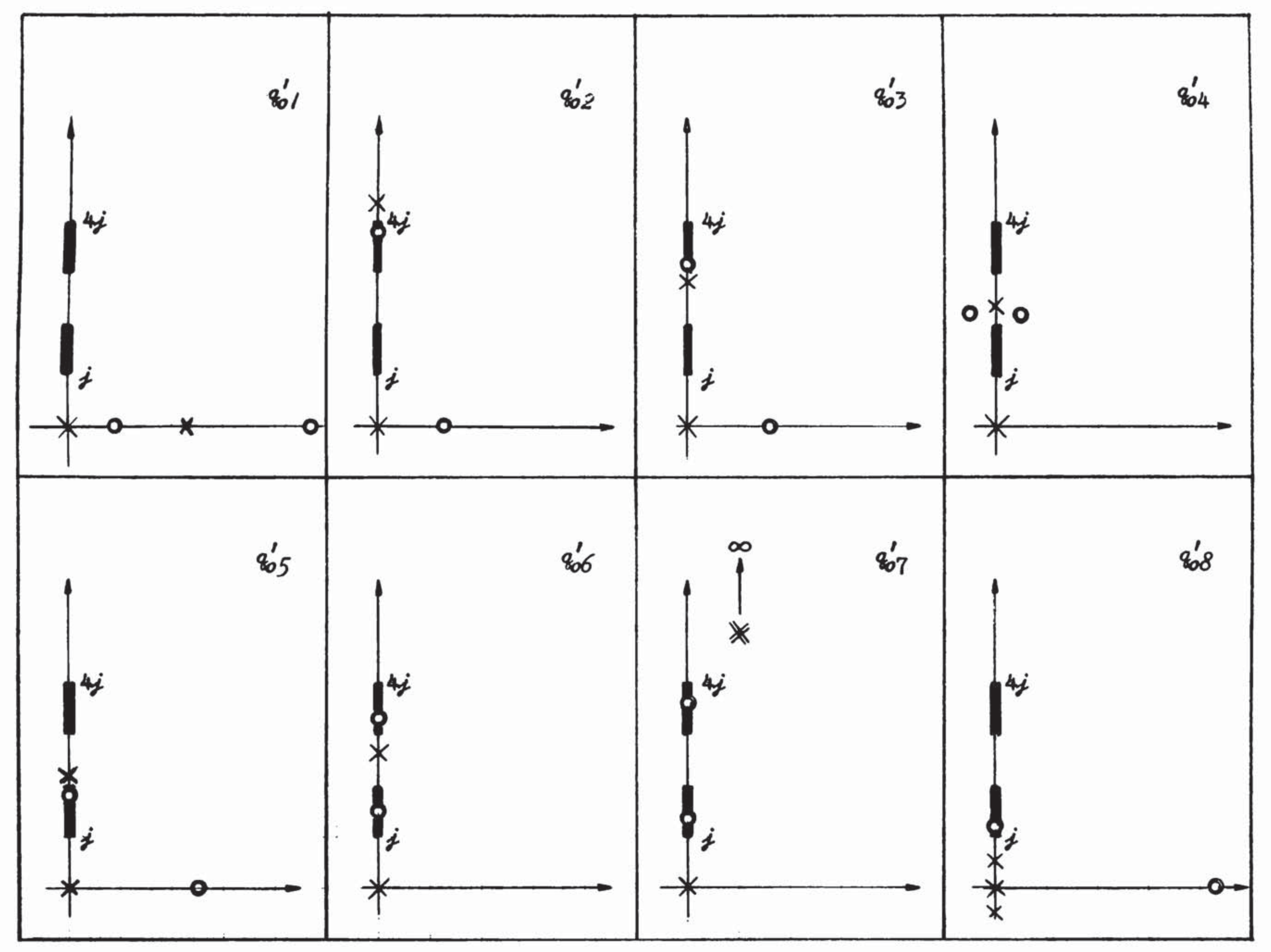


Abb. D.6

<u>Beispiel</u>: Für eine Vorzeichenwahl entsprechend $q_{o,6}$ seien die folgenden Verzweigungspunkte gewählt :

$$\omega_1 = +1 \quad ; \quad \omega_2 = -2 \quad ; \quad \omega_3 = +3 \quad ; \quad \omega_4 = -4$$

Damit wird :

$$w_3 = -2 \quad ; \quad w_2 = +13 \quad ; \quad w_1 = -14 \quad ; \quad w_o = +24$$

Reflexionsnullstellen :

$$s^4 + w_2 s^2 + w_o = s^4 + 13 s^2 + 24 = 0$$

$$s_{o1,2} = \pm j\, 1{,}4926$$

$$s_{o3,4} = \pm j\, 3{,}2820$$

Dämpfungspole :

$$s\,(w_3 s^2 + w_1) = -s\,(2 s^2 + 14) = 0$$

$$s_{p,0} = 0{,}0$$

$$s_{p1,2} = \pm j\, 2{,}6457$$

In analoger Weise berechnet man auch die Lage der Nullstellen aller anderen Fälle. Die Ergebnisse sind in Abb.D.6 zusammengefasst.

<u>D.3.2. Zusammengesetzte q'-Funktionen.</u>

Durch den Zusatz einer elementaren q'-Funktion zu einer elementaren oder zusammengesetzten q-Funktion entsteht eine zusammengesetzte q'-Funktion. Dieser Zusatz ist immer notwendig, wenn ein Pol ungerader Ordnung bei 0 und ∞ erzielt werden soll. Die daraus gebildete charakteristische Funktion sei mit $K_{o,s}(s)$ bezeichnet. Das Zusammensetzen der q_o'- Funktion mit einer q-Funktion geschieht ähnlich der Gleichung (D-27) :

(D-27),(D-44) : $$Q' = Q\,Q_o' = \frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2} \; \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2} \qquad (D-47)$$

In diesen Gleichung müssen T_1 und T_2 entsprechend den Arten der zusammengesetzten q-Funktionen gewählt werden. Für eine Art gilt ((C-4), für zwei Arten (D-29) etc.

(D-47) :

$$Q' = \frac{(T_1 W_1 + T_2 W_2) + (T_1 W_2 + T_2 W_1)}{(T_1 W_1 + T_2 W_2) - (T_1 W_2 + T_2 W_1)} \qquad (D-48)$$

$$Q' = \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{T_{s,1} - T_{s,2}} \qquad (D-49)$$

Daraus leitet man leicht ab :

$$K_{o,s}(s) = \frac{F_{o,s}(s)}{P_{o,s}(s)} = j\,[Q' + \frac{1}{Q'}] = j\,\frac{T_{s,1}^2 + T_{s,2}^2}{T_{s,1}^2 - T_{s,2}^2} \qquad (D-50)$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke erhält man :

$$K_{o,s}(s) = j\,\frac{(T_1^2 + T_2^2)(W_1^2 + W_2^2) + 4\,T_1 T_2 W_1 W_2}{(T_1^2 - T_2^2)(W_1^2 - W_2^2)} \qquad (D-51)$$

((C-6),(D-45)

$$K_{o,s}(s) = \frac{F_{o,a}(s)\,F_o'(s) + \Delta F(s)}{P_{o,a}(s)\,P_o'(s)} \qquad (D-52)$$

wobei wieder : $F_{o,a}(s)$ und $P_{o,a}(s)$ das Zähler- und Nennerpolynom derjenigen charakteristischen Funktion ist, die aus den zusammengesetzten q-Funktionen abgeleitet wurde, und
$F_o'(s)$ und $P_o'(s)$ das Zähler- unf Nennerpolynom der Hilfsfunktion nach Gleichung (D-45), und

$$\Delta F(s) = 4\,T_1 T_2 W_1 W_2 \qquad (D-53)$$

ist.

Zahlenbeispiel:

Gefordert: Dem früher durchgerechneten Zahlenbeispiel des Unterabschnitts D.2.1 soll je ein einfacher Pol bei 0 und ∞ zugesetzt werden.

Lösung:

Als Zwischenergebnis der frühren Rechnung wird gebraucht:

$$F_{o,a}(s) = 95{,}3378819\, s^{12} + 626{,}6487076\, s^{10} + 1624{,}4342843\, s^{8} + 2121{,}624834\, s^{6}$$
$$1468{,}5825813\, s^{4} + 509{,}6136327\, s^{2} + 69{,}0316602$$

(Im Zahlenbeispiel des Unterabschnitts D.2.1. ist dieses Polynom nur in seiner normierten Form als $F(s)$ angegeben.)

(D-41):
$$q'_{o,6} = \sqrt{\frac{(s + j0{,}6)(s - j0{,}9)(s + j1{,}1)(s - j1{,}5)}{(s - j0{,}6)(s + j0{,}9)(s - j1{,}1)(s + j1{,}5)}}$$

(D-42):
$$W_1^2 = s^4 - j\,0{,}7\, s^3 + 2{,}07\, s^2 - j\,0{,}711\, s + 0{,}891$$

(D-46):
$$K'_o(s) = \frac{2\, s^4 + 4{,}14\, s^2 + 1{,}782}{s(s^2 + 1{,}0157143)}$$

Zusätzlich zu den einfachen Polen bei 0 und ∞ erzeugt $K'_o(s)$ auch einen Dämpfungspol bei

$$f_p = f_{ref}\sqrt{1{,}0157143} = 100{,}783\ \text{kHz}$$

(D-52),(D-53):

$$F_{o,a}(s)\, F'_o(s) = 190{,}6757638\, s^{16} + 1647{,}996246\, s^{14} + 6013{,}0863232\, s^{12}$$
$$12085{,}0956112\, s^{10} + 14615{,}4388898\, s^{8} + 10879{,}8946148\, s^{6}$$
$$4864{,}8779198\, s^{4} + 1193{,}9225670\, s^{2} + 123{,}0144186$$

$$\Delta F(s) = 190{,}6676820\, s^{16} + 1694{,}7455512\, s^{14} + 6312{,}5762064\, s^{12} +$$
$$12855{,}6071336\, s^{10} + 15635{,}5317212\, s^{8} + 11611{,}916470\, s^{6}$$
$$5133{,}8092264\, s^{4} + 1233{,}1404224\, s^{2} + 123{,}003678$$

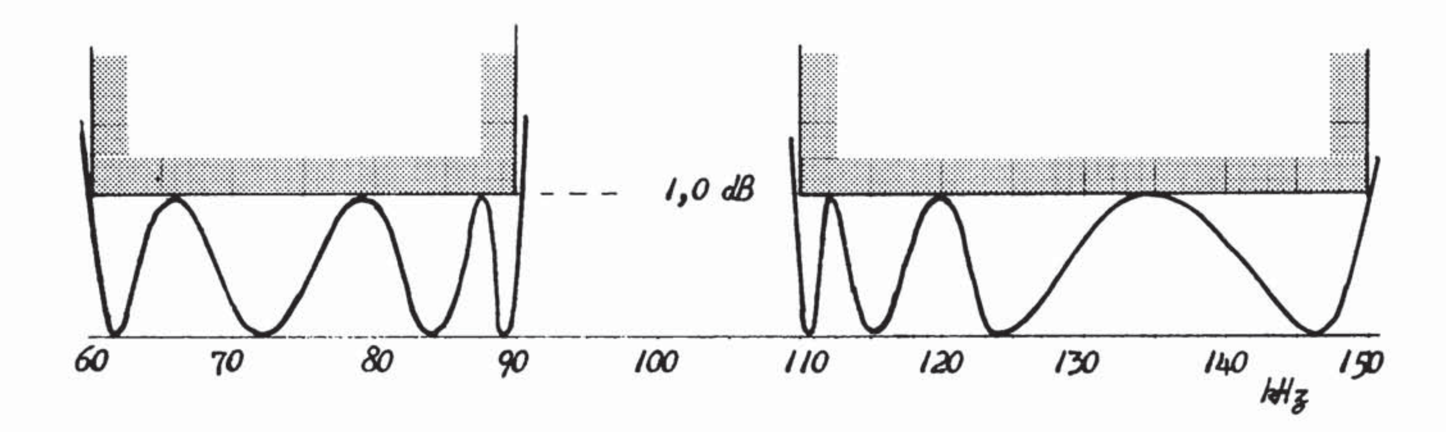
Damit ergeben sich für K(s) die folgenden Polynome in normierter Form :

$$F(s) = s^{16} + 8{,}7656988\, s^{14} + 32{,}3216845\, s^{12} + 65{,}4022064\, s^{10} + 79{,}3273516\, s^{8}$$
$$+ 58{,}9804580\, s^{6} + 26{,}2196381\, s^{4} + 6{,}3645069\, s^{2} + 0{,}6451352$$

$$P(s) = s^{15} + 1{,}0571717\, s^{13} - 2{,}9960228\, s^{11} - 3{,}1698555\, s^{9} + 2{,}9920266\, s^{7}$$
$$+ 3{,}1682202\, s^{5} - 0{,}9960037\, s^{3} - 1{,}0555364\, s$$

Für eine Welligkeit von 1,0 dB berechnet man $C_k = 157{,}90468$.

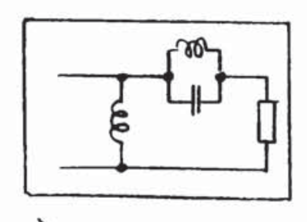
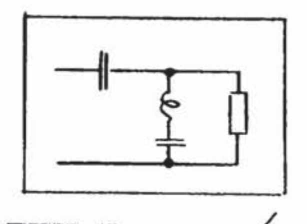
<u>Auswertung der Betriebsdämpfung über die beiden Durchlassbereiche.</u>



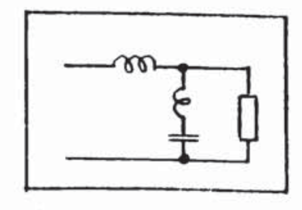
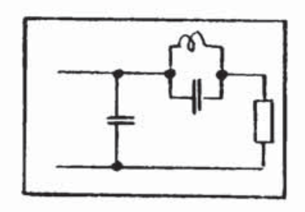
D.4. Bemerkungen zur Realisierung der Kettenschaltung.

Wie bei den meisten Filterentwürfen, wird man auch bei Filtern mit zwei oder mehr Durchlassbereichen die Kettenschaltung vorziehen. Für solche Realisierungen gelten die bekannten Methoden und Regeln. Das gilt vor allem für das Abspalten von Dämpfungspolen im oberen und unteren Sperrbereich, für die die gleichen Gesichtspunkte wie bei Bandfiltern gelten. Bei allen nichtkanonischen Abspaltgliedern hat man die Wahl zwischen zwei Typen, wobei man aus praktischen Gründen jeweils die Glieder verwendet, wie sie in Abb.D.7 dargestellt sind.Folgt man diesen Regel, so ergibt eine fest vorgegebene Polfolge immer eindeutig eine Grundkettenschaltung, die dann nachträglich noch durch Netzwerktransformationen modifiziert werden kann. Wählt man ausserdem die Pole so, dass weit abliegende Pole nahe den Klemmenpaaren und stark sperrende Pole etwa in der Mitte der Schaltung zu liegen kommen, kann man fast immer positive Schaltelemente erwarten.

Für Filter mit Dämpfungspolen auch im mittleren Sperrbereich gelten ähnliche Gesichtspunkte .Man wird am besten die Polfolge so wählen, dass man von der Mitte des Sperrbereiches ausgehend abwechselnd Dämpfungspole oberhalb und unterhalb abspaltet,so dass die stark sperrenden Pole etwa in der Mitte zu liegen kommen. Es wird aber wahrscheinlich vom Einzelfall abhängen, welches von den beiden zulässigen nicht-kanonischen Gliedern zweckmässiger ist.In einem Rechenprogramm sollte man beide Abspaltmöglichkeiten vorsehen und die Entscheidung davon abhängig machen, welches Glied positive Schaltelemente liefert.

vorgezogen für den unteren Sperrbereich

vorgezogen für den oberen Sperrbereich

Abb.D.7

Von besonderer Bedeutung ist es, die Grundschaltung so zu steuern, dass sie im Bedarfsfall auch die Verwendung von Quarzen zulässt, und zwar entweder direkt oder nach geeigneten Netzwerktransformationen. Das bedingt :

(a) dass die zu ersetzende Elementgruppe der Struktur des Quarzes entspricht,

(b) dass das Verhältnis C_p / C_s in der Schaltung grösser ist als das des Quarzes einschliessliche aller Streukapazitäten, und

(c) dass man den Quarz wenn irgend möglich transformatorisch der Schaltung anpassen kann; mit anderen Worten, es ist wünschenswert eine Parallelspule zum Quarz zu haben.

Es soll darauf hingewiesen werden, dass die Bedingung " b " immer von den numerischen Verhältnissen abhängen wird.

Vor geraumer Zeit hat Poschenrieder eine Schaltung angegeben , die alle obigen Bedingungen erfüllt ([PO-1]). Man kann den betreffenden Schaltungsabschnitt entweder direkt durch geeignete Steuerung des Abspaltprozesses oder durch nachträgliche Netzwerkstransformation erzielen (siehe Abb.D. 8). Die Schaltung ist zweifellos geeignet, den als scharf angenommenen Dämpfungspol " f_3 " sinnvoll und stabil durch einen Quarz zu realisieren. Ihr grosser praktischer Nachteil ist der Einfluss der Güte sowohl des Querzweiges als auch der beiden Sperrkreise, die das Sperren bei " f_1 " bewirken, und ausserdem auch der sehr kritische Einfluss der Stabilität dieser Sperrkreise. Ein weiterer Nachteil ist auch die Vermehrung der Spulenzahl. Aus diesen Gründen wird die Schaltung nur in Sonderfällen verwedet.

Wesentlich stabiler, aber auch aufwendiger ist eine Schaltung, wie sie in Abb.D.9 gezeigt ist. Sie wird vielfach in Filtern mit hohen Anforderungen angewandt, wo

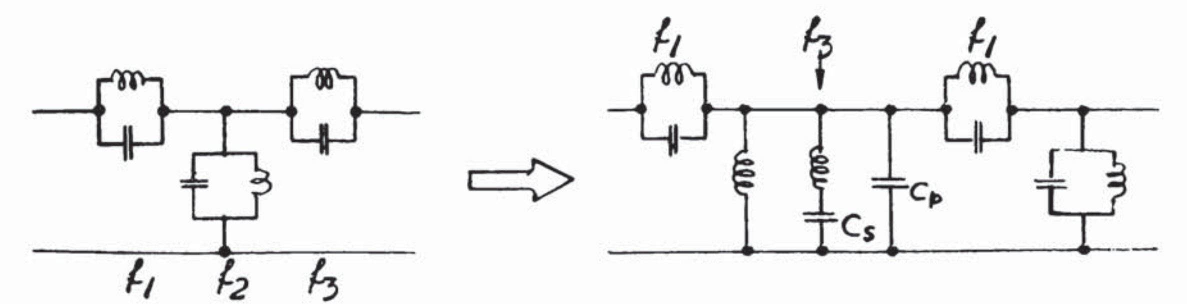


Abb.D. 8.

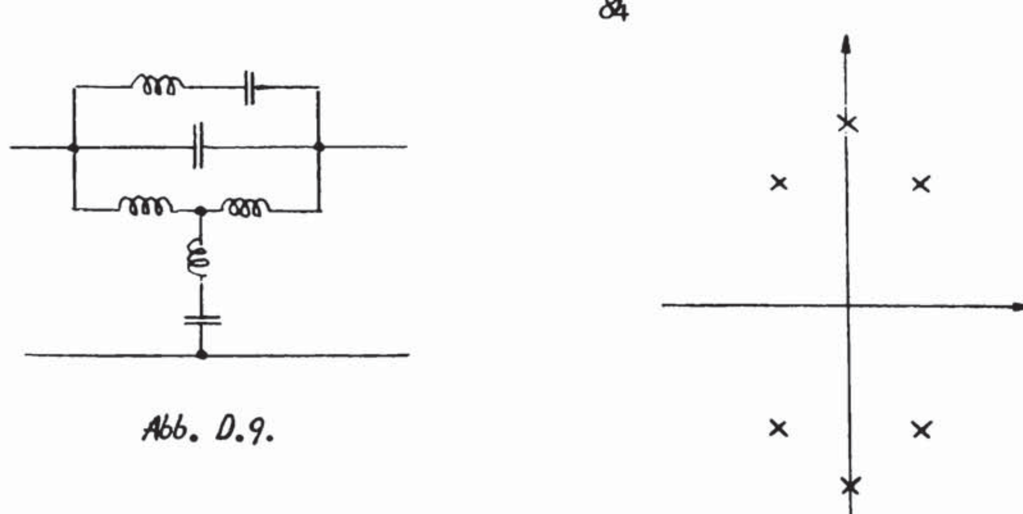


Abb. D.9.

der zusätzliche Aufwand nicht sehr ins Gewicht fällt. Es handelt sich bei diesen Schaltungen um schmalbandige Sperren, die gewünschten Filtern vor- oder nachgeschalten werden und deren Zweck es ist, einen der Dämpfungspole zu unterstützen. Mit Ausnahme eines engen Bereiches in der Nähe der Quarzfrequenz wirkt ein solches Glied als Allpass und es wird auch als solcher entworfen.
Jedes solche Glied trägt zum Polynom P(s) die gewünschte Sperrstelle auf der imaginären Achse bei, ausserdem aber auch ein Polquadrupel, das natürlich nichts am Sperrverhalten der Gesamtschaltung ändert. Der Zusatz dieses Gliedes erzeugt auch drei Paare von Reflexionsnullstellen, die aber alle - von Ausnahmefällen abgesehen - komplex sind. Die Vergeudung von 6 Reflexionsnullstellen und 4 Dämpfungspolen macht solche Glieder wenig ökonomisch. Sie sind aber sehr stabil und werden daher gerne angewendet
Das günstige Verhalten von Gliedern nach Abb.D.9 legt es nahe, Glieder ähnlicher Struktur zu untersuchen. Der Gegenstand der Untersuchung ist eine Schaltung, wie sie als Teil " A " der Abb.D.10 gezeigt ist. Das Ziel der Untersuchung ist zunächst einmal das Sperrverhalten solcher Glieder, damit die notwendigen Dämpfungspole bereits beim Approximationsverfahren vorgesehen werden können. Solchen Polen kann dann mittels der q-Funktionen ein Satz Reflexionsnullstellen zugeordnet werden, der in einem oder auch in mehreren Durchlassbereichen zur Geltung kommen kann. Gelingt es ferner, den Abspaltprozess so zu steuern, dass sich ein

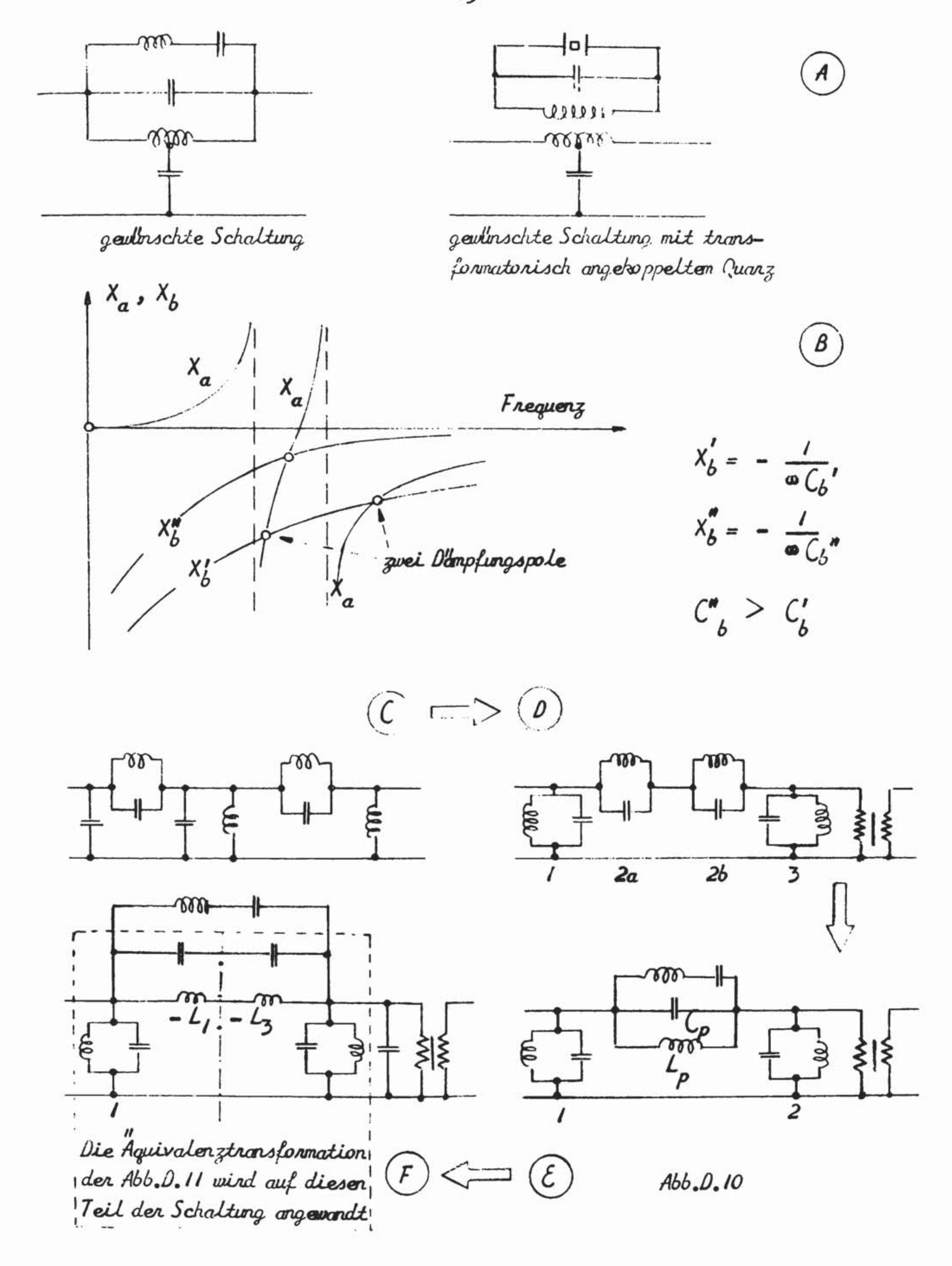
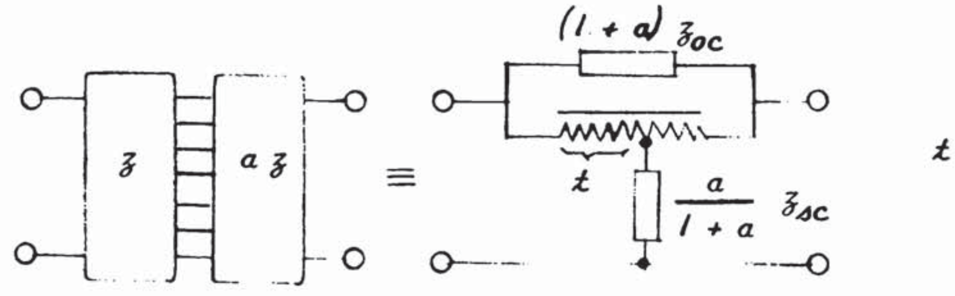

A
gewünschte Schaltung
gewünschte Schaltung mit transformatorisch angekoppeltem Quarz
B
X_a, X_b
X_a
X_a
Frequenz
X_b''
X_b'
zwei Dämpfungspole
X_a
$X_b' = -\frac{1}{\omega C_b'}$,
$X_b'' = -\frac{1}{\omega C_b''}$
$C_b'' > C_b'$
C
D
1
2a
2b
3
$-L_1$
$-L_3$
1
C_p
L_p
1
2
Die Äquivalenztransformation der Abb.D.11 wird auf diesen Teil der Schaltung angewandt
F
E

Abb.D.10



$t = \frac{1}{1 + a}$

t = Übersetzungsverhältnis bezogen auf die gesamte Windung.

z_{oc} = Leerlaufimpedanz
z_{sc} = Kurzschlussimpedanz, } des linken Teils wie beim Bartlettschen Satz.

Abb.D.11

solches Glied mittels Netzwerktransformationen aus einer Grundschaltung ergibt, dann wird es ein wesentlicher Teil der Schaltung und kein später angefügter Zusatz. Verglichen mit dem Glied der Abb.D.9 hat das Glied der Abb.D.10 eine Spule weniger. Die verbleibende Spule ist erwünscht, da sie das Anpassen eines Quarzes durch einen Transformator erleichtert.

Zur Erhöhung der Freiheitsgrade soll die Anzapfung der Spule beliebig sein. Dadurch wird das Glied dissymmetrisch im Sinn von Guillemin ([Gu-1]; Seite 207 - 210). Nach dem Bartlettschen Theorem hat es Brückenreaktanzen, wie sie im Teil B der Abbildung gezeigt sind. Die Schnittpunkte von X_a und X_b bestimmen die Dämpfungspole. Für genügend kleine Werte ergeben sich zwei Dämpfungspolpaare bei endlichen Frequenzen. (Zwei Schnittpunkte von X_b' in der Abbildung.) Durch Vergrösserung von C_b rückt das eine Polpaar zunächst nach ∞. Eine weitere Vergrösserung erzeugt ein Polpaar auf der reellen Achse. Die zugehörige Kurve X_b'' hat nur mehr einen Schnittpunkt mit X_a. In allen Fällen ist auch ein einfacher Pol bei ∞ vorhanden.

Ein Glied nach Abb.D.10 kann daher ein Polpaar bei einer gewünschten Frequenz und ein anderes auf der reellen Achse erzeugen. Solch ein spezielles Polquadrupel ist aus zwei Gründen wünschenswert. Erstens erleichtert es das Abgleichen: Die beim Einstellen des gewünschten Pols ebenfalls auftretende Verschiebung des anderen auf der reellen Achse stört kaum das Sperrverhalten. Der zweite Grund ergibt sich aus der Realisierung und darauffolgenden Netzwerktransformation. Man spaltet

Zahlenbeispiel.

Das folgende Zahlenbeispiel soll prinzipiell zeigen, wie man die möglichen q-Funktionen in einem praktischen Anwendungsfall auswählen kann. Die Aufgabe sei, ein Übertragungsnetzwerk zu entwerfen, mit dem das Toleranschema der Abb D.1 befriedigt werden kann. Die Struktur der Schaltung soll eine Transformation nach Abb. D.10 zulassen.

(a) Anzahl und Verteilung der erforderlichen Dämpfungspole.

Auf Grund der bekannten Transformation : Bezugstiefpass - Bandsperre kann man 6 Dämpfungspole in der Sperrlücke erwarten. Ein geeigneter Bezugstiefpass für das Toleranzschema ist der Cauertiefpass C 06 .. 39, aus dessen tabellierten Polen und Nullstellen man die folgenden Dämpfungspole errechnet ([Ce - 1]):

$$f_{\infty 1} = 80{,}640 \text{ kHz} \qquad f_{\infty 6} = 83{,}658 \text{ kHz}$$
$$f_{\infty 2} = 80{,}980 \text{ kHz} \qquad f_{\infty 5} = 83{,}306 \text{ kHz}$$
$$f_{\infty 3} = 81{,}686 \text{ kHz} \qquad f_{\infty 4} = 82{,}585 \text{ kHz}$$

Die Transformation der Abb. D.10 erfordert zusätzlich zwei Pole auf der reellen Achse, die mit $f_{\infty 7}$ (reell) und $f_{\infty 8}$ (reell) bezeichnet werden sollen. Schliesslich benötigt man auch zur Realisierung Pole bei 0 und ∞. Aus praktischen Gründen sind solche Pole zweckmässigerweise 2. Ordnung.
Dieser Polstellensatz bedingt die folgende Struktur der charakteristischen Funktion :

$$K(s) = C\,\frac{\text{Polynom 20.Grades}}{\text{Polynom 18.Grades}}$$

(b) Auswahl der q-Funktionen

Es ist zweckmässig, die Pole $f_{\infty 2}$ bis $f_{\infty 5}$ duch q-Funktionen der 1. Art einzuführen. Für diese Auswahl sind folgende Gesichtspunkte massgebend :
Das Toleranzschema gestattet das Ausweiten der Durchlassgrenzen 60 kHz und 108 kHz nach unten bzw. nach oben. Dieser Freiheitsgrad kann dazu benützt werden,

dazu zuerst zwei Bruneglieder ab, das erste bei der gewünschten Sperrstelle, das andere beim Polpaar auf der reellen Achse. (Teil C in Abb.D.10.) Mit Hilfe der Nortontransformation und einer einfachen Zweipoltransformation ergibt sich daraus nacheinander die Schaltung D und E. Da beide Brune Glieder keine Sperrstellen bei 0 und ∞ besitzen, folgt unmittelbar, dass im Teil E:

$$C_1 C_p + C_1 C_3 + C_p C_3 = 0$$
$$L_1 + L_p + L_3 = 0$$

sein muss. Infolge des Dämpfungspolpaars auf der reellen Achse kann man erwarten, dass $L_p < 0$ ist. Es gilt dann die Schaltung F. Offensichtlich wird bei der nun folgenden Äquivalenztransformation nach Abb.D.11 die Reaktanz z_{sc} keine Spule mehr enthalten. Der Fortfall dieser Spule ist also bedingt durch $L_p < 0$, das ein Pol auf der reellen Achse normalerweise erzeugt.

Um ein Quarzglied der angegebenen Art in einer Kettenschaltung vorzusehen, muss man also je Quarzglied einen Dämpfungspol auf der reellen Achse vorsehen. Jeder solche Dämpfungspol ist natürlich für den Sperrbereich ein Verlust. Er kann aber mittels der q-Funktionen eine Reflexionsnullstelle im Durchlassbereich erzeugen. Für die Erzeugung eines solchen Sperrgliedes ist es ferner auch notwendig, die Realisierung so zu steuern, dass eine Kondensator im Querzweig entweder unmittelbar vor, zwischen oder unmittelbar nach den Brunegliedern zu liegen kommt. Das erfordert also bereits in der Approximation einen Dämpfungspol mindestens 1.Ordnung bei ∞. Ein Dämpfungspol bei 0 ist nicht erforderlich, ein weiterer und wesentlicher Vorteil gegenüber der Poschenriederschaltung, denn dadurch wird das Quarzglied geeignet für Tiefpässe, Bandpässe und natürlich auch für Filter mit mehr als einen Durchlassbereich. Aus diesem Grunde sind die in den letzgenannten Filtertypen oft zwangsweise auftretenden Pole auf der rellen Achse unter Umständen sehr willkommen.

Die normierten Grenzen ω_x und ω_y der Abb. D.2 an solche Stellen zu legen, an der Dämpfungspole notwendig sind. Diese Dämpfungspole werden dann gleichzeitig die sehr erwünschten Pole bei 0 und ∞ erzeugen. Aus den festgehaltenen Durchlassgrenzen f_2 und f_3 und den vorgeschriebenen Frequenzen $f_x = \omega_x f_{ref}$ und $f_y = \omega_y f_{ref}$ errechnet man als neu Grenzen der ausgeweiteten Durchlassbereiche :

$$f_1 = 47{,}613 \text{ kHz} ; \quad f_4 = 136{,}783 \text{ kHz}$$

Die Dämpfungspole $f_{\infty 3}$ und $f_{\infty 4}$ liegen innerhalb des Bereiches $f_x \dots f_y$ und erzeugen daher Pole auf der reellen Achse :

vorgeschrieben $f_{\infty 3} = 81{,}686$ kHz erzeugt $f_{\infty 7} = 123{,}314$ kHz reell
" $f_{\infty 4} = 82{,}585$ kHz " $f_{\infty 8} = 54{,}434$ kHz reell

Die verbleibenden Polpaare bei $f_{\infty 1}$ und $f_{\infty 6}$ können durch eine einzige q-Funktion eingeführt werden, u.z. erzeugt das das Vorschreiben von $f_{\infty 1}$ einen zugeorneten Pole etwa dort, wo $f_{\infty 6}$ benötigt wird.

vorgeschrieben $f_{\infty 1} = 80{,}640$ kHz erzeugt $f'_{\infty 6} = 83{,}520$ kHz.

(c) Die Übertragungspolynome.

$$F_o(s) = s^{20} + 11{,}21144075\, s^{18} + 54{,}830002328\, s^{16} + 154{,}467553357\, s^{14} + 218{,}092333466\, s^{12} + 334{,}598376652\, s^{10} + 272{,}503636114\, s^{8} + 148{,}231975668\, s^{6} + 51{,}463341045\, s^{4} + 10{,}271601362\, s^{2} + 0{,}891634128$$

$$P_o(s) = s^{18} + 3{,}316264688\, s^{16} - 0{,}176083058\, s^{14} - 14{,}601993059\, s^{12} - 24{,}308815019\, s^{10} - 14{,}806386924\, s^{8} - 0{,}303391778\, s^{6} + 3{,}316731313\, s^{4} + 1{,}012905872\, s^{2}$$

$$C = 2{,}0359125$$

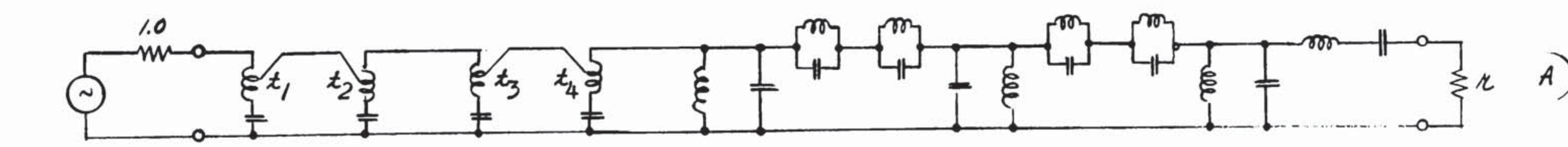
Die Auswertung der charakteristischen Funktion ergibt eine gleichmässige Welligkeit $A_{max} = 0{,}011$ dB im Durchlassbereich. Die Minima der Sperrdämpfung liegen all bei etwa 53 dB. Die 50 dB Grenze wird bei 80,6 kHz und 83,6 kHz erreicht. Die 10 Reflexionsnullstellen verteilen sich zu gleichen Teilen auf beide Durchlassbereiche.

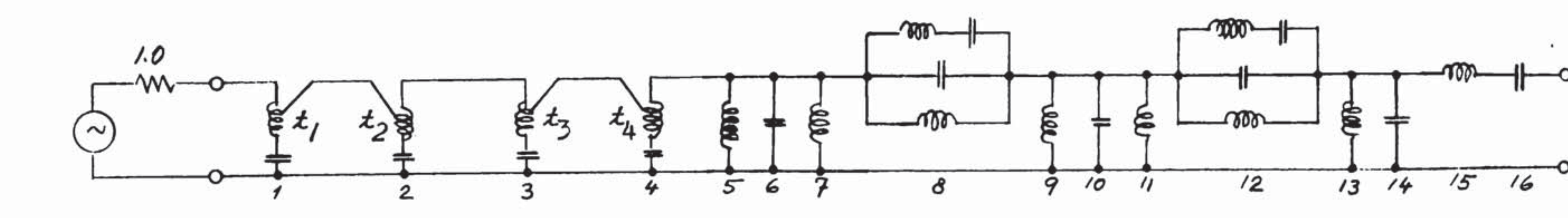
Aus $F_o(s)$, $P_o(s)$ und C errechnet man das folgende Hurwitzpolynom:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(s) = s^{20} &+ 2{,}891780139772219\, s^{19} + 15{,}392636362926350\, s^{18} + \\
&+ 31{,}746241450354710\, s^{17} + 91{,}135350174388450\, s^{16} + \\
&+ 144{,}366655707576100\, s^{15} + 288{,}566165602107900\, s^{14} + \\
&+ 363{,}611408408502000\, s^{13} + 554{,}307673508099200\, s^{12} + \\
&+ 563{,}911891551974700\, s^{11} + 682{,}241930639495400\, s^{10} + \\
&+ 560{,}363316591563000\, s^{9} + 546{,}357216894432900\, s^{8} + \\
&+ 356{,}606173325960200\, s^{7} + 219{,}944318273680900\, s^{6} + \\
&+ 139{,}495460570737300\, s^{5} + 86{,}728607008219740\, s^{4} + \\
&+ 30{,}111985827125730\, s^{3} + 14{,}275430965974920\, s^{2} + \\
&+ 2{,}672059548810704\, s + 0{,}8916341277248715
\end{aligned}
$$

(d) Die Kettenschaltung.

Infolge von 10 Dämpfungspolen ist eine Unzahl von Abspaltefolgen und daher von Grundschaltungen möglich. Von einigen dieser Schaltungen, die praktisch durchgerechnet wurden, wurde die Schaltung gewählt, die als Teil " A " der Abb.D.12 dargestellt ist. Durch einfache Zweipoltransformationen ergibt sich daraus die Schaltung " B ". Für die 4 Dämpfungspole des linken Teiles wurden kanonische Realisierungsglieder verwendet, da sich solche Glieder erfahrungsgemäss gut realisieren lassen, wenn man moderne Schalenkerne verwendet und wenn $t_i \to 1$ geht. Die Werte der normierten Schaltelemente legen es nahe, als Bezugswiderstand für den linken Teil der Schaltung etwa $R_{ref} = 10$ Ohm zu verwenden. Die Querspule L_5 kann zum Impedanzwechsel für den rechten Teil verwendet werden, in dem ein höherer Bezugswiderstand erforderlich ist.





$l_1 = 22,37$; $t_1 = 0,989$; $c_1 = 0,0445$ $\qquad$ $l_2 = 502,86$; $t_2 = 0,9877$; $c_2 = 0,00203$

$l_3 = 13,080$; $t_3 = 0,975$; $c_3 = 0,0760$ $\qquad$ $l_4 = 80,23$; $t_4 = 0,9712$; $c_4 = 0,01316$

$l_5 = 1,3448$ $\qquad$ $c_6 = 0,2140$

$l_7 = 0,5367$

$l_{8p} = -0,6792$; $c_{8p} = 0,6400$; $l_{8s} = 27,84$; $c_{8s} = 0,0352$; $\omega_s = 1,0099382$

$l_9 = 1,1425$

$c_{10} = 3,484$

$l_{11} = 0,9441$

$l_{12p} = -1,321$; $c_{12p} = 1,688$; $l_{12s} = 24,5$; $c_{12s} = 0,04294$; $\omega_s = 0,9749789$

$l_{13} = 0,3773$

$c_{14} = 0,6582$; $l_{15} = 0,4061$; $r = 0,4564$

Abb. D.11

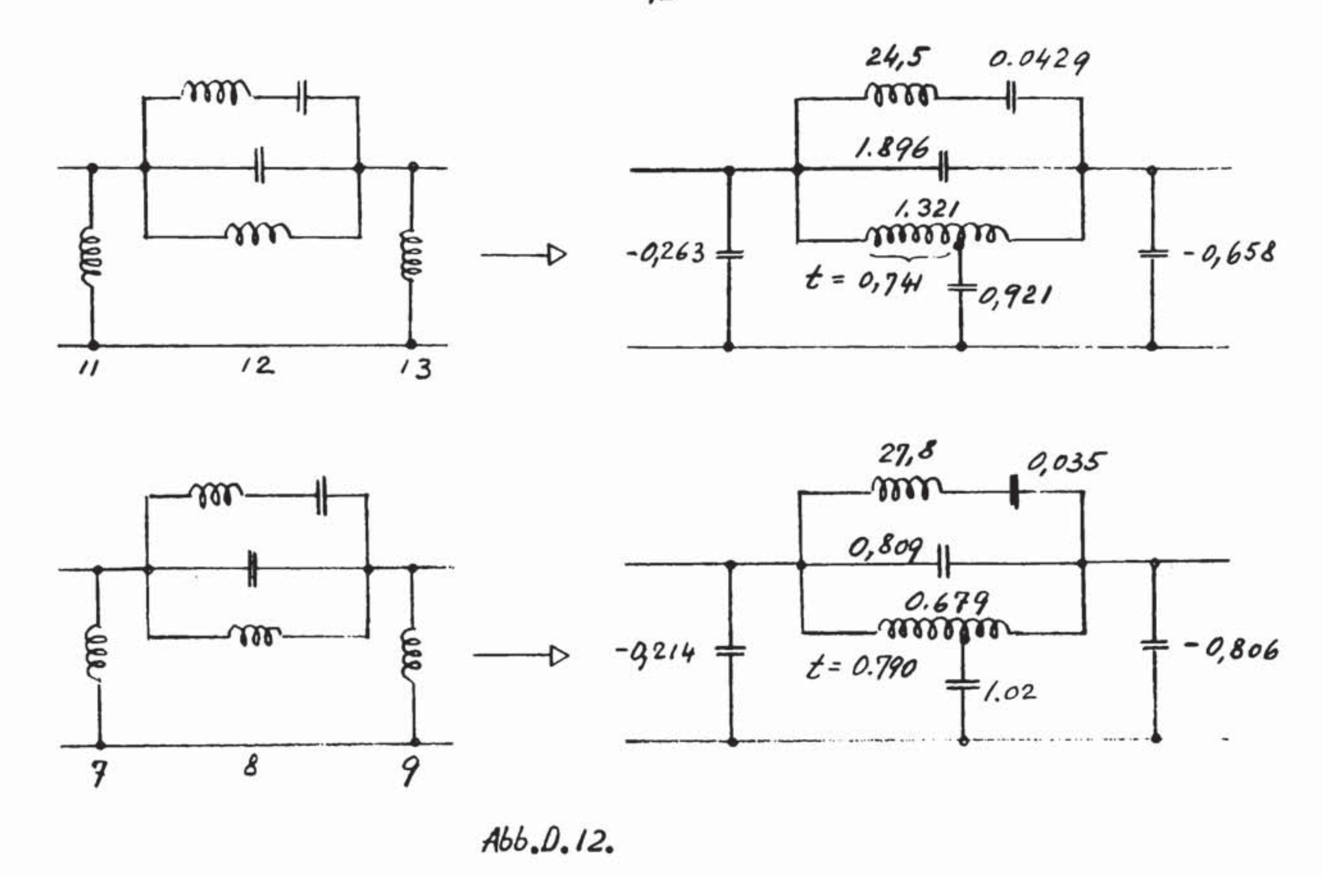


Abb.D.12.

Die Elementgruppe mit den indices 7 , 8 , 9 und die mit 11 , 12 , 13 erfüllen die Voraussetzungen der Netzwerktransformation der Abb.D.10. Sie ist in Abb.D.12 gezeigt und wurde so gesteuert, dass die Kondensatoren c_6 und c_{14} zu Null werden. Die transformierten Glieder haben wohl die gewünschte Struktur, doch sind die numerischen Werte so, dass das Einfügen eines Quarzes in diesem speziellen Fall nicht möglich ist. Der Grund ist ein zu kleines c_p / c_s - Verhältnis in beiden Gliedern. Um dies dennoch zu ermöglichen, kann folgendes versucht werden :

1. Versteilerung der Flanken durch Vergrösserung von f_2 und Verkleinerung von f_3
2. Verschieben beider Polpaare auf der reellen Achse zu höheren Werten; Untersuchungen der obigen Transformation an Bandpässen haben gezeigt, dass dadurch das c_p / c_s-Verhältnis verbessert wird. Die Welligkeit im Durchlassbereich wird sich dadurch nur geringfügig ändern.

3. Durch Anwendung einer etwas allgemeineren Transformation als der nach Abb.D.10 bei der statt eines einfachen Kondensators ein Parallelschwingungskreis im Querzweig auftritt.
4. Es ist ferner auch denkbar, dass eine andere Abspaltefolge ein durch Quarze realisierbares c_p / c_s - Verhältnis ergibt.

(e) Abschliessende Bemerkungen.

Die obige Realisierung des Übertragungsnetzwerks, die zur Demonstration der Einzelheiten durchgerechnet wurde, ist nur eine der Möglichkeiten. Es gibt eine Reihe anderer Entwurfsmöglichkeiten, die man ebensogut in Betracht ziehen kann. Verzichtet man z.B. auf die Struktur, die zur Verwendung von Quarzen notwendig ist, dann ist die einfachste Schaltung ein antimetrisches Netzwerk 16.Grades. Es ergibt sich zweckmässig mittels zweier q-Funktionen 1.Art und zweier q-Funktionen 3.Art und erfordert 8 Spulen.
Anderseits kann auch ein Netzwerk 24.Grades in Betracht gezogen werden, dessen Polverteilung im Bereich $f_2 - f_3$ sich aus einem Cauertiefpass C 08 .. 57 ergeben. Die Breite der beiden Übergangsbereiche wird etwa dreimal so klein und man daher ein ausreichendes c_p / c_s - Verhältnis in den beiden Quarzstrukturen erwarten. Die Gesichtspunkte einer solchen Realisierung sind analog dem obigen Zahlenbeispiel und das Netzwerk erfordert 12 Spulen.

E. Zusammenfassung

Wie in den vorangehenden Abschnitten gezeigt wurde, sind die q-Funktionen recht brauchbar für viele Anwendungen der Netzwerksynthese. Sie sind eines der bekannten Mittel, mit denen man gleichmässige Welligkeit der Dämpfung in einem oder mehreren Durchlassbereichen erzielen kann. Dadurch, dass man die aus der Wellenparametertheorie bekannten q-Funktionen durch solche erweitert, die nur für die Synthese sinnvoll sind, lassen sich Resultate erzielen, die den anderen bekannten Methoden zumeindest gleichwertig sind.

Bei der praktischen Arbeit mit q-Funktionen hat sich das im Abschnitt C beschriebene Rekursionsverfahren für die Berechnung der charakteristischen Funktionen als sehr brauchbar für das Programmieren von Rechenmaschinen erwiesen. Hat man ein auf diesen Formeln aufbauendes Program für einen bestimmten Filtertyp geschaffen, so lässt es sich durch Änderung von nur wenigen Befehlen in das Program irgend eines anderen Typs umwandeln. Praktisch laufen solche Änderungen fast nur darauf hinaus, den richtigen Grad und die richtigen Koeffizienten der Polynome R_I und R_{II} in der Gleichung (C-1) und der auf diese Gleichung folgenden Tabelle aufzustellen.
Im Abschnitt C wurde weiters auch gezeigt, wie man bei antimetrischen Filtern Aufgaben lösen kann, bei der entweder die Reflexionsnullstellen oder eine Kombination von Nullstellen und Dämpfungspolen vorgegeben sind. Diese Methoden sind von Bedeutung, wenn zusätzlich zur Welligkeit auch Forderungen an die Phase oder Laufzeit gestellt sind. Es wurde an einem praktischen Beispiel gezeigt, wie durch den Zusatz eines Dämpfungspols auf der reellen Achse die Übertragungseigenschaften eines Tiefpasses wesentlich verbessert werden können. In diesem Beispiel ergab sich die Lage dieses Pols durch systematische Verbesserungen auf Grund von den Ergebnissen, die das oben erwähnte Rechenprogramm lieferte. Der Zeitaufwand für

solche iterativen Versuche ist nur in einfachen Anwendungsfällen tragbar. Für kompliziertere Filter wurde ein iterative Verfahren vorgeschlagen, das die Lage von komplexen Dämpfungspolen und solchen auf der reellen Achse iterativ unter Einbeziehung der q-Funktionen optimiert.
Der letzt Abschnitt behandelt q-Funktionen, mit denen Filter mit mehr als einem Durchlassbereich entworfen werden können. In Aufgaben dieser Art kommen die verallgemeinerten q-Funktionen voll zur Geltung. Von den acht zur Verfügung stehenden Typen wurden diejenigen drei eingehend besprochen, die praktisch am bedeutendsten sind. Neu gegenüber den q-Funktionen von Tiefpässen und Bandpässen ist, dass jeder vorgeschriebene Parameter m die Lage von zwei Polpaaren (oder einem Polquadrupel) bestimmt. Infolge dieser Eigenschaft ist es bereits bei der Approximation notwendig, die richtigen Typen zur Zusammensetzung heranzuziehen.
Den Schluss der Arbeit bildet eine Betrachtung über die Realisierung in Kettenform, auch unter Berücksichtigung von Quarzen, und ein praktisches Beispiel, in dem die Gesichtspunkte bei der Typenwahl dargestellt werden.

Literaturübersicht.

[Be - 1] Benett,B.J.: " Synthesis of Electric Filters with Arbitrary Phase Characteristics. "
[ConRec.Ire 1953, Part 5 (Circ. Theory), pg 19]

[Bi - 1] Bingham,J.A.C.: " A new method of solving the accuracy problem in filter design. "
[Trans. Circ. Theory, Sept. 1964]

[Ca - 1] Cauer, W.: " Theorie der linearen Wechselstromschaltungen."
[Akademie Verlag, Berlin; 1954]

[Ce - 1] Christian,E. Eisenmann, E.: " Filter Design Tables and Graphs."
[John Wiley a. Sons, Inc., 1966]

[Co - 1] Colin,J.E.: " Un nouveau filtre symetrique de synthese en echelle: le filtre passe-bande parametrique."
[Cables et Transm. 16, No.1, 1962]

[Co - 2] Colin,J.E.: " Filtres en echelle a nombre maximum d'ondulations de l'affaiblissement composit."
[Cables et Transmission, 12, No.4, 1858]

[Da - 1] Darlington,S.: " Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics."
[Journ. Math. a. Physics: M T T 18, 1939, pg. 312]

[Ei - 1] Eisenmann,E.: Persönliche Korrespondenz.

[Fe - 1] Fetzer,V.: " Die numerische Berechnung von Filterschaltungen mit allgemeinen Parametern nach der modernen Theorie unter besonderer Berücksichtigung der Cauerschen Arbeiten."
[A E Ü 5 (1951), Seite 499 - 508]

[Fe - 2] Fetzer,V.: " Expli-ite Berechnungsformeln für Filerschaltungen
mit allgemeinen Parmetern,"
[A E Ü 8 (1954), Seite 31 - 46]

[Fe - 3] Fettweis,A.: " Filters met willkeurig gekozen dempningspolen en
Tschebyscheukarakteristck in het doorlaatgebiet."
[Tijdschrift von het Nederlands Radiogenootschap,
Deel 25, No. 5/6, 1960]

[Fe - 4] Fettweis,A.: " Recurrance formulae for the caculation of the
characteristic function of filters with Tschebyscheff
passband behaviour."
[Rev. HF, Vol. 4, No.10, 1960, Seite 230]

[Fe - 5] Fettweis,A.: " Explicit formulae for the calculation of the charac-
teristic function of filters with Tschebyscheff passband
behaviour."
[Rev. Hf, Vol. 4, No. 12 , 1960]

[Gu - 1] Guillemin,E.: " Synthesis of passive Networks."
[John Wiley a. Sons, Inc., 1957]

[Ot - 1] Orchard,H.J. Temes,G.:" Filter design using transformed variables."
[Trans. Circ.Theory, Dec. 1968]

[Po -1] Poschenrieder,W.: " Steile Quarzfilter grosser Bandbreite in Ab -
zweigschaltung."
[Nachr. Zeit., Bd. 12, Seite 132 - 138, März 1959]

[Ru - 1] Rumpelt,E.: " On the design of wave filters with specified per-
formance."
[Diss. Munich, Techn. Hochschule, 1947]

[Ru - 2] Rumpelt,E.: " Schablonenverfahren für den Entwurf elektrischer
Wellenfilter auf Grund der Wellenparameter."
[T F T 31, H.8, 1942]

[Sz – 1] Szentimai, G.: " Theoretical basis of a computer program package for filter synthesis."
[Pro. 1st. Annual Allerton Conference: University of Illin., Urbana, Ill., 1963]

" " A filter synthesis program."
[Kou – Kaiser: System analysis by digital computer."
[Chapter 9., John Wiley a. Sons, Inc. 1968]

[Wa – 1] Watanabe, H.: " Approximation Theory for Filter Networks."
[Trans. Circ. Theory, Vol.9, No.3, Sept. 1961]

[Wa – 2] Watanabe et alii: "Design of Chebyshev Filters with Flat Group Delay Characteristics."
[Trans. Circ. Theory Dec. 1968]

Lebenslauf.

Geboren 17.8.1919 in Wien

1925 - 29 Volksschule (grösstenteils in Wien)

1929 - 37 Realgymnasium St. Joseph in Wien XXI, Strebersdorf.

1937 - 45 Wehrdienst (Österr.Bundesheer, Deutsche Wehrmacht)

1945 - 50 Studium an der Technischen Hochschule in Wien.
1.Staatsprüfung 1947, Prädikat : mit Auszeichnung.
2.Staatsprüfung 1950, Prädikat : sehr gut.

1950 - 53 Arbeit als Ingenieur bei der Firma Siemens Austria, Wien

1953 - 55 Auswanderung nach USA. Arbeit als Ingenieur für das Signalcorps in deren Research Laboratories in Ft.Monmouth.

1955 - 63 Arbeit als Ingenieur für General Electric, zuerst in Syracuse (N.Y.), später in Lynchburg (Va).

1963 - 71 Arbeit als Manager-Networks für ITT-Telecommunications in Raleigh, North Carolina. Verantwortlich für den Entwurf und alle Fabrikationsprobleme von Übertragungsnetzwerken.

1965 - 71 Gleichzeitig Übernahme einer Lehrtätigkeit als " Adjunkt Professor " und Mitglied der Graduate Faculty of the Department of Electr.Engineering, North Carolina State University.

1971 - present : Transfer innerhalb ITT zu Stndard Telefon og Kabelfabrik in Oslo; Arbeit als Forschungsingenieur im Forschungslabor.